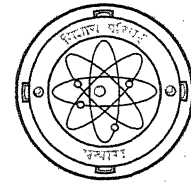
ISSN : 0505-5806

The Research Journal of
the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 46 January 2003 No. 1

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 46 January 2003 No.1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

बहुचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद को अन्तर्वलय करने वाला ऑयलरी समाकल

एच. एस. पी. श्रीवास्तव
गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान स्नातकोत्तर महाविद्यालय, रतलाम (म. प्र.)

[प्राप्त — जून 18, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखक द्वारा परिभाषित सिस्टर सेलिन बहुपदों वाले ऑयलरी समाकलों को सिद्ध किया गया है। बहुचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद के प्राचलों एवं चरों का विशेषीकरण करके अनेक बहुपदों वाले ऑयलरी समाकल को ज्ञात किया गया है— जैसे जैकोबी, लेजेन्ड्र, गेगनबर, शेबीशेव, हर्माइट, बेटमैन, राइस, होराडम, बेसल, बेडियन्ट बहुपद के अलावा कुछ असंतत बहुपद जैसे पास्टरनाक, क्रावचौक, हॉन, मेक्सनर एवं प्वासन-चार्लियर बहुपद। अन्त में इन ऑयलरी समाकलों को भिन्नात्मक अवकलजों में परिवर्तित भी किया गया है।

Abstract

Eulerian integral involving Sister Celine's polynomials of several variables. *By* H. S. P. Srivastava, Mathematics Department, Government Arts and Science PG College, Ratlam (M.P.).

In this paper, we have evaluated Eulerian integrals involving Sister Celine's polynomials of several variables defined by author. By specializing the parameters and variables of the Sister Celine's polynomials many Eulerian integrals have been deduced involving many well-known polynomials (and their product) such as Jacobi, Legendre, Gegenbauer, Chebyshev, Hermite, Bateman, Rice, Horadam, Bessel, Bedient and few discrete polynomials also like Pasternak, Krowtchouk, Hahn, Meixner and Poisson-Charlier. In last section, these Eulerian integrals are interpreted interms of Fractional derivatives.

1. प्रस्तावना

फेसेनमॉयर **[3, 4 See also 10, p. 290]** ने 1947 में एक बहुपद परिभाषित किया जो सिस्टर सेलिन बहुपद से प्रचलित हुआ एवं जो निम्न संबंध से जनित होता है :

$$(1-t)^{-1} \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; \frac{-4xt}{(1-t)^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; x \right) t^n \tag{1.1}$$

तथा जिससे प्राप्त होता है —

$$f_n \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; x \right) = {}_{p+2}F_{q+2} \left(\begin{matrix} -n,\ n+1,\ a_1, \ldots, a_p \\ 1/2,\ 1,\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} ; x \right) \tag{1.2}$$

सिस्टर सेलिन ने प्राचलों एवं चरों का विशेषीकरण कर कुछ सरल बहुपदों को ज्ञात किया गया। जैसे — लेजेन्ड्रे (Legendre), लॉगरे (Laguerre), विशेष जैकोबी (Jacobi) ($\beta = -\alpha$), बेटमैन (Bateman) एवं रॉईस बहुपद (Rice Polynomials)।

लेखक[35] ने इस बहुपद को विस्तृत एवं व्यापकीकृत किया तथा द्विचरीय एवं बहुचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद को निम्न जनक-फलन द्वारा परिभाषित किया :

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - t_i\right)^{-1-c_i} F^{p:p_1;\ldots;p_r}_{q:q_1;\ldots;q_r} \left(\begin{matrix} (a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha^{(r)}_j)_{1,p} : (c'_j, \gamma'_j)_{1,p_1}; \ldots; \\ (b_j : \beta'_j, \ldots, \beta^{(r)}_j)_{1,q} : (d^{(r)}_j, \delta^{(r)}_j)_{1,q_1}; \ldots; \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (c^{(r)}_j, \gamma^{(r)}_j)_{1,p_r} \\ (d^{(r)}_j, \delta^{(r)}_j)_{1,q_r} \end{matrix} ; \frac{(-4z_1 t_1)^{\lambda_1}}{(1-t_1)^{2\lambda_1}}, \ldots, \frac{(-4z_r t_r)^{\lambda_r}}{(1-t_1)^{2\lambda_r}} \right)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_r=0}^{\infty} f_{n_1 \ldots n_r} \left(\begin{matrix} (a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha^{(r)}_j)_{1,p} : (c'_j, \gamma'_j)_{1,p_1}; \ldots; \\ (b_j : \beta'_j, \ldots, \beta^{(r)}_j)_{1,q} : (d'_j, \delta'_j)_{1,q_1}; \ldots; \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (c^{(r)}_j, \gamma^{(r)}_j)_{1,p_r} \\ (d^{(r)}_j, \delta^{(r)}_j)_{1,q_r} \end{matrix} ; z_1^{\lambda_1}; \ldots, z_r^{\lambda_r} \right) t_1^{n_1} \ldots t_r^{n_r} \tag{1.3}$$

जो देता है

$$f_{n_1 \ldots n_r}\left(z_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r^{\lambda_r}\right) \equiv f_{n_1 \ldots n_r}\left(\begin{array}{l}(a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : (c'_j, \gamma'_j)_{1,p_1}; \ldots; \\ (b_j : \beta'_j, \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : (d'_j, \delta'_j)_{1,q_1}; \ldots;\end{array}\right.$$

$$\times \left.\begin{array}{l}(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)})_{1,p_r} \\ (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1,q_r}\end{array} ; z_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r^{\lambda_r}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{(1+c_i)_{n_i}}{(n_i)!} F^{p:p_1+2;\ldots;p_r+2}_{q:q_1+2;\ldots;q_r+2}\left(\begin{array}{l}(a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{n})_{1,p} : (-n_1, \lambda_1), \\ (b_j : \beta'_j, \ldots, \beta_j^{n})_{1,q} : \left(\frac{1+c_1}{2}, \lambda_1\right),\end{array}\right.$$

$$\times \begin{array}{l}(1+n_1+c_1, \lambda_1), (c'_j, \gamma'_j)_{1,p_1}; \ldots; (-n_r, \lambda_r, \\ \left(\frac{2+c_1}{2}, \lambda_1\right), (d'_j, \delta'_j)_{1,q_1}; \ldots; \left(\frac{1+c_r}{2}, \lambda_r\right),\end{array}$$

$$\times \left.\begin{array}{l}(1+n_r+c_r, \lambda_r), (c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)})_{1,p_r} \\ \left(\frac{2+c_r}{2}, \lambda_r\right), (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1,q_r}\end{array} ; z_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r^{\lambda_r}\right) \quad (1.4)$$

परिभाषा (1.3) एवं (1.4) में $r = 2$ लेने पर हमें द्विचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद की निम्न परिभाषा प्राप्त होती है। ($c_1 = c$, $c_2 = d$, $t_1 = t$, $t_2 = h$, $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$, $n_1 = n$, $n_2 = m$ प्रतिस्थापित करने पर) :

$$(1-t)^{-1-c}(1-h)^{-1-d} F^{p:p_1;\ldots;p_r}_{q:q_1;\ldots;q_r}\left(\begin{array}{l}(a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : (c'_j, \gamma'_j)_{1,p_1}; \ldots; \\ (b_j : \beta'_j, \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : (d'_j, \delta'_j)_{1,q_1}; \ldots;\end{array}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(c_j'', \gamma_j'')_{1,p_2} \\ (d_j^{(r)}, \delta_j'')_{1,q_2}\end{matrix} ; \frac{(-4 z_1 t_1)^{k_1}}{(1-t_1)^{2k_1}}, \frac{(-4 z_2 h)^{k_2}}{(1-h)^{2k_2}}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cdots \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,\,m} \left(\begin{matrix}(a_j : \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : (c_j', \gamma_j')_{1,p_1} ; \\ (b_j : \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : (d_j', \delta_j')_{1,q_1} ;\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(c_j'', \gamma_j'')_{1,p_2} \\ (d_j^{(r)}, \delta_j'')_{1,q_2}\end{matrix} ; z_1^{k_1}, z_2^{k_2}\right) t^n h^m \tag{1.5}$$

एवं

$$f_{n,m}\left(z_1^{k_1}, \ldots, z_2^{k_2}\right) \equiv f_{n,m} \left(\begin{matrix}(a_j : \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : (c_j', \gamma_j')_{1,p_1} ; \\ (b_j : \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : (d_j', \delta_j')_{1,q_1} ;\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(c_j'', \gamma_j'')_{1,p_2} \\ (d_j'', \delta_j'')_{1,q_2}\end{matrix} ; z_1^{k_1}, z_2^{k_2}\right)$$

$$= \frac{(1+c)_n (1+d)_n}{n!\; m!} F^{p : p_1+2 ; p_2+2}_{q : q_1+2 ; q_2+2} \left(\begin{matrix}(a_j : \alpha_j', \ldots, \alpha_j'')_{1,p} : (-n, k_1), \\ (b_j : \beta_j', \ldots, \beta_j'')_{1,q} : \left(\frac{1+c}{2}, k_1\right),\end{matrix}\right.$$

$$\times \begin{matrix}(1+n+c, k_1), (c_j', \gamma_j')_{1,p_1} ; (-m, k_2), \\ \left(\frac{2+c}{2}, k_1\right), (d_j', \delta_j')_{1,q_1} ; \left(\frac{1+d}{2}, k_2\right),\end{matrix}$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1+m+d,\ k_2),\ (c'_j,\ \gamma'_j)_{1,p_2} \\ \left(\frac{2+d}{2},\ k_2\right),\ (d'_j,\ \delta'_j)_{1,q_2} \end{matrix} ;\ z_1^{k_2},\ z_2^{k_2} \right) \tag{1.6}$$

परिभाषा (1.5), (1.6) में $p = q = m = c = d = 0$ एवं k_1, k_2, $\alpha' s$, $\beta' s$, $\gamma' s$, $\delta' s$ को इकाई लेने पर, हमें एकचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद की परिभाषा (1.1), (1.2) प्राप्त होती है।

संबंध (1.3), (1.4); (1.5), (1.6) में प्रयुक्त श्रेणी चिर-परिचित क्रमशः r एवं 2 चरों का व्यापकीकृत लॉरीसेला फलन (Generalized Lauricella functions of r and 2 variables) है जिसको श्रीवास्तव तथा दाओस्त [14; see also 16, p. 37] ने परिभाषित किया :

$$F^{p:p_1;\ldots;p_r}_{q:q_1;\ldots;q_r}\left(z_1 - z_r\right) \equiv F^{p:p_1;\ldots;p_r}_{q:q_1;\ldots;q_r}\left(\begin{matrix} (a_j : \alpha'_j,\ \ldots,\ \alpha_j^{(r)})_{1,p} : \\ (b_j : \beta'_j,\ \ldots,\ \beta_j^{(r)})_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (c'_j,\ \gamma'_j)_{1,p_1};\ldots;(c'_j,\ \gamma'_j)_{1,p_1} \\ (d'_j,\ \delta'_j)_{1,q_1};\ldots;(d'_j,\ \delta'_j)_{1,q_1} \end{matrix} ;\ z_1\ ;\ldots;z_r \right)$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \Omega\left(m_1,\ \ldots,\ m_r\right) \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{z_r^{m_r}}{m_r!} \tag{1.7}$$

जहाँ पर

$$\Omega\left(m_1,\ \ldots,\ m_r\right) = \frac{\prod_{j=1}^{p}\left(a_j\right)_{m_1\alpha'_j+\ldots+m_r\alpha_j^{(r)}} \prod_{j=1}^{p_1}\left(c'_j\right)_{m_1\gamma'_j} \cdots \prod_{j=1}^{p_r}\left(c_j^{(r)}\right)_{m_r\gamma_j^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{q}\left(b_j\right)_{m_1\beta'_j+\ldots+m_r\beta_j^{(r)}} \prod_{j=1}^{q_1}\left(d'_j\right)_{m_1\delta'_j} \cdots \prod_{j=1}^{q_r}\left(d_j^{(r)}\right)_{m_r\delta_j^{(r)}}}$$

प्राचल $a' s$, $b' s$, $c' s$, $d' s$ संमिश्र संख्याएँ एवं संगत गुणांक $\alpha' s$, $\beta' s$, $\gamma' s$, $\delta' s$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ तथा चर $z_1, \ldots, z_r$ समिश्र है। इसी प्रकार संबंध (1.3) से (1.6) में आये प्राचल k_1, k_2, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ तथा अन्य प्राचल $c_1, \ldots, c_r$, c, d सामान्यतः अप्रतिबन्धित (unrestricted in general) हैं।

प्राचल $(a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p}$ निम्न P–प्राचलों $(a_1 : \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(r)}), \ldots, (a_p : \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(r)})$ को निरूपित करता है एवं इसी प्रकार अन्य प्राचल !

जहाँ पर किसी प्रकार का संशय न हो, सुविधा के लिए हम निम्न संकेतों का प्रयोग करेंगे

$$a \equiv \left(a_j : \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} ; \; b \equiv \left(b_j : \beta'_j, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} ;$$

$$c' \equiv \left(c'_j : \gamma'_j\right)_{1,p_1}, \ldots, \; c^r \equiv \left(c'_j, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r}$$

$$d' \equiv \left(d'_j : \delta'_j\right)_{1,q_1}, \ldots, \; d^r \equiv \left(d'_j, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r}$$

बहुश्रेणी (1.7) एवं इसकी विशेष दशा जब $r = 2$ पूर्णता अभिसारी है [15; sections 5 (p.157-158)] section 3.4 (p. 153-157); 1, sections 3.7; 2, sections 1.4] श्रेणी (1.7) में यदि धनात्मक वास्तविक संख्याओं $\alpha' s$, $\beta' s$, $\gamma' s$, $\delta' s$ को इकाई रखें तो यह व्यापकीकृत लॉरीसेला श्रेणी (1.7) तुरंत कॅम्पे-डी-फेरियट (Kampe-de-Feriet) श्रेणी में परिवर्तित हो जाती है।

प्रचलित ऑयलर बीटा समाकल[10; eq (1), p. 18]

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \; (\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0) \tag{1.8}$$

को सरलता से निम्न रूप में लिखा जा सकता है—

$$\int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \; (\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0, \; a \neq b) \tag{1.9}$$

द्विपद प्रसार

$$(ut+v)^r = (au+v)^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-r)_m}{m!} \left(\frac{-u(t-a)}{au+v}\right)^m,$$

$$\left(\left|\frac{u(t-a)}{au+v}\right| < 1; \; t \in [a, b]\right) \tag{1.10}$$

2. बहुचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद का व्यापक ऑयलर समाकल :

इस अनुभाग में हम द्वि एवं बहुचरी सिस्टर सेलिन बहुपद का व्यापक ऑयलर समाकल ज्ञात करेंगे।

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times\left(u_1 t_1 + v_1\right)^{e_1}\left(u_2 t_2 + v_2\right)^{e_2}\int_{n,m}\left(\left(z_1 x_1\right)^{k_1}\left(u_1 t_1 + v_1\right)^{\rho_1}\right.$$

$$\left.\times\left(u_2 t_2 + v_2\right)^{\rho_2}\left(z_2 x_2\right)^{k_2}\left(u_1 t_1 + v_1\right)^{\sigma_1}\left(u_2 t_2 + v_2\right)^{\sigma_2}\right)dt_1\, dt_2$$

$$= \left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}\left(a_1 u_1 + v_1\right)^{e_1}\left(a_2 u_2 + v_2\right)^{e_2}$$

$$\times\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\frac{(-e_1)_{s_1}(-e_2)_{s_2}}{s_1!\, s_2!}\left(\frac{-u_1(b_1 - a_1)}{a_1 u_1 + v_1}\right)^{s_1}\left(\frac{-u_2(b_2 - a_2)}{a_2 u_2 + v_2}\right)^{s_2}$$

$$\times B\left(\alpha_1 + s_1, \beta_1\right) B\left(\alpha_2 + s_2, \beta_2\right)$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}(1 + e_1 : \rho_1, \sigma_1), (1 + e_2 : \rho_2, \sigma_2), a : c' ; c''\\ (1 + e_1 - s_1 : \rho_1, \sigma_1), (1 + e_2 - s_2 : \rho_2, \sigma_2), b : d' ; d''\end{matrix}\right.$$

$$\times\left(z_1 x_1\right)^{k_1}\left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\rho_1}\left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\rho_2}\left(z_2 x_2\right)^{k_2}$$

$$\left.\times\left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\sigma_1}\left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\sigma_2}\right) \qquad (2.1)$$

$$\prod_{i=1}^{r}\int_{a_i}^{b_i}\left(t_i - a_i\right)^{\alpha_i - 1}\left(b_i - t_i\right)^{\beta_i - 1}\left(u_i t_i + v_i\right)^{e_i}$$

$$\times f_{n_1,\ldots,n_r}\left(\left(z_1 x_1\right)^{k_1}\prod_{i=1}^{r}\left(u_i t_i + v_i\right)^{\rho_i^{(1)}}, \ldots, \left(z_r x_r\right)^{k_r}\prod_{i=1}^{r}\left(u_i t_i + v_i\right)^{\rho_i^{(r)}}\right)dt_1\ldots dt_r$$

$$= \prod_{i=1}^{r}\left(b_i - a_i\right)^{\alpha_i + \beta_i - 1}\left(a_i u_i + v_i\right)^{e_i}$$

$$\times \sum_{\substack{s_i=0 \\ (i=1,\ldots,r)}}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \frac{(-e_i)_{s_i}}{s_i!} \left(\frac{-u_i(b_i - a_i)}{a_i u_i + v_i} \right)^{s_i} B\left(\alpha_i + s_i, \beta_i\right)$$

$$\times f_{n,\ldots,m} \left(\begin{matrix} (1+e_1 : \rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_1^{(r)}), \ldots, (1+e_r : \rho_r^{(1)}, \ldots, \rho_r^{(r)}), a : c' ; \ldots ; c^r \\ (1+e_1 - s_1 : \rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_1^{(r)}), \ldots, (1+e_r - s_r : \rho_r^{(1)}, \ldots, \rho_r^{(r)}), b : d' ; \ldots ; d \end{matrix} \right.$$

$$\times \left(z_1 x_1 \right)^{k_1} \prod_{i=1}^{r} \left(a_i u_i + v_i \right)^{\rho_i^{(1)}}, \ldots, \left(z_r x_r \right)^{k_r} \prod_{i=1}^{r} \left(a_i v_i + v_i \right)^{\rho_i^{(r)}} \Bigg) \tag{2.2}$$

जहाँ पर

$$\min\left(e_i, \rho_i^{(1)}, \rho_i^{(r)} \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2\right) > 0, \min\left(\mathrm{Re}\left(\alpha_i\right), \mathrm{Re}\left(\beta_i\right)\right) > 0, b_i \neq a_i$$

और
$$\max\left\{ \left| \frac{u_1(b_1 - a_1)}{a_1 u_1 + v_1} \right| \right\} < 1, \ (i = 1, \ldots, r)$$

सूत्र (2.1) की उत्पत्ति : वाम पक्ष में द्विचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद की परिभाषा (1.6) का उपयोग करने, श्रेणी एवं समाकल के क्रम को परिवर्तित करने पर (जो कि वैध है) हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\frac{(1+c)_n (1+d)_m}{n!\, m!} \sum_{m_1+0}^{n} \sum_{m_2+0}^{n} \frac{a(-n)_{k_1 m_1} (n+1)_{k_1 m_1} \; c'(-m)_{k_2 m_2} (m+1)_{k_2 m_2} \; c''}{b\left(\frac{1+c}{2}\right)_{k_1 m_1} \left(\frac{2+c}{2}\right)_{k_1 m_1} d' \left(\frac{1+d}{2}\right)_{k_2 m_2} \left(\frac{2+d}{2}\right)_{k_2 m_2} d'}$$

$$\times \frac{(z_1 x_1)^{k_1 m_1}}{m_1!} \frac{(z_2 x_2)^{k_2 m_2}}{m_2!}$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(u_1 t_1 + v_1\right)^{e_1 + \rho_1 m_1 + \sigma_1 m_2} dt_1$$

$$\times \int_{a_2}^{b_2} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1} \left(u_2 t_2 + v_2\right)^{e_2 + \rho_2 m_1 + \sigma_2 m_2} dt_2 \tag{2.3}$$

आन्तरिक समाकलों में द्विपद प्रसार सूत्र (1.10) का उपयोग कर समाकलों का मान सूत्र (1.9) की सहायता से ज्ञात करने के पश्चात् प्राप्त पदों में सूत्र[10, exp (8), p.32] अर्थात्

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k \, n!}{(n-k)!}, \; 0 \le k \le n \tag{2.4}$$

का प्रयोग करने पर, संबंध (2.3) का जो मान प्राप्त होता है वह इस प्रकार है—

$$\left(b_1 - a_2\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1} \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{e_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{e_2}$$

$$\times \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(-e_1)_{s_1} (-e_2)_{s_2}}{s_1! \, s_2!} \left(\frac{-u_1 (b_1 - a_1)}{a_1 u_1 + v_1}\right)^{s_1} \left(\frac{-u_2 (b_2 - a_2)}{a_2 u_2 + v_2}\right)^{s_2}$$

$$\times B\left(\alpha_1 + s_1, \beta_2\right) B\left(\alpha_2 + s_2, \beta_2\right)$$

$$\times \left[\frac{(1+c)_n (1+d)_m}{n! \, m!} \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \right.$$

$$\times \frac{a\left(1 + e_1\right)_{\rho_1 m_1 + \sigma_1 m_2} \left(1 + e_2\right)_{\rho_2 m_1 + \sigma_2 m_2}}{\left(1 + e_1 - s_1\right)_{\rho_1 m_1 + \sigma_1 m_2} \left(1 + e_2 - s_2\right)_{\rho_2 m_1 + \sigma_2 m_2}}$$

$$\times \frac{(-n)_{k_1 m_1} (n+1)_{k_1 m_1} \, c' \, (-m)_{k_2 m_2} (m+1)_{k_2 m_2} \, c''}{\left(\frac{1+c}{2}\right)_{k_1 m_1} \left(\frac{2+c}{2}\right)_{k_1 m_1} d' \left(\frac{1+d}{2}\right)_{k_2 m_2} \left(\frac{2+d}{2}\right)_{k_2 m_2} d''}$$

$$\times \frac{\left(\left(z_1 x_1\right)^{k_1} \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\rho_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\rho_2}\right)^{m_2}}{m_2!}$$

$$\left. \times \frac{\left(\left(z_2 x_2\right)^{k_2} \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\sigma_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\sigma_2}\right)^{m_2}}{m_2!} \right]$$

अब पुनः द्विचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद की परिभाषा (1.6) का उपयोग करने पर हमें वांछित सूत्र (2.1) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.2) को भी सिद्ध किया जा सकता है। हमने स्थान की बचत के लिए सूत्र (2.1) की उपपत्ति दिखाई है।

इसी प्रकार अगले अनुभाग में अनुप्रयोगों के लिए हम द्विचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद का ऑयलर समाकल ही लेंगे। साथ ही, (2.1) सूत्र में निम्न को प्रतिस्थापित कर सूत्र को छोटा बनायेंगे जिससे स्थान कम लगे। इसी प्रकार सूत्र (2.2) के भी अनुप्रयोग ज्ञात किये जा सकते हैं।

सूत्र (2.1) में निम्न प्रतिस्थापन करने पर :

$$x_1 = x_2 = x$$

$$F\left(t_{1,} \; t_2\right) \equiv \left(u_1 t_1 + v_1\right)^{e_1} \left(u_2 t_2 + v_2\right)^{\rho_2}$$

$$\left(X_1\right)^{k_1} \equiv \left(z_{1,} \; x\right)^{k_1} \left(u_1 t_1 + v_1\right)^{\rho_1} \left(u_2 t_2 + v_2\right)^{\rho_2}$$

$$\left(Y_1\right)^{k_2} \equiv \left(z_{2,} \; x\right)^{k_2} \left(u_1 t_1 + v_1\right)^{\sigma_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\sigma_2}$$

$$\left(X_2\right)^{k_1} \equiv \left(z_{1,} \; x\right)^{k_1} \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\rho_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\rho_2}$$

$$\left(Y_2\right)^{k_2} \equiv \left(z_{2,} \; x\right)^{k_2} \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{\sigma_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{\sigma_2}$$

$$A \equiv \left(a_1 u_1 + v_1\right)^{e_1} \left(a_2 u_2 + v_2\right)^{e_2}$$

$$\times \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{(-e_1)_{s_1} \; (-e_2)_{s_2}}{s_1 ! \; s_2 !} \left(\frac{-u_1 (b_1 - a_1)}{a_1 u_1 + v_1}\right)^{s_1} \left(\frac{-u_2 (b_2 - a_2)}{a_2 u_2 + v_2}\right)^{s_2}$$

$$\times B\left(\alpha_1 + s_1 , \beta_2\right) B\left(\alpha_2 + s_2 , \beta_2\right)$$

$$\Delta_1 \equiv \left(1 + e_1 : \rho_1, \sigma_1\right), \left(1 + e_2 : \rho_2 , \sigma_2\right)$$

$$\Delta_2 \equiv \left(1 + e_1 - s_1 : \rho_1, \sigma_1\right), \left(1 + e_2 - s_2 : \rho_2 , \sigma_2\right)$$

सूत्र (2.1) संहत रूप में निम्नवत् प्राप्त होता है :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) f_{n,m}\left(X_1^{k_1}, Y_1^{k_2}\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\,(b_1 - a_1)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}(b_2 - a_2)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}\begin{pmatrix}\Delta_1, a : c'; c'' \\ & ; X_2^{k_1}, Y_2^{k_2} \\ \Delta_2, b : d''; d''\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

3. अनुप्रयोग

ऑयलर समाकल (2.1) एवं (2.2) अनेक व्यापकताओं वाले हैं। इस सूत्रों में प्रयुक्त अनेक प्राचलों एवं चरों का विशेषीकरण करने पर इनका उपयुक्त प्रयोग करके आश्चर्यजनक रूप से अनेक उपयोगी बहुपदों (या इन बहुपदों के गुणन) जैसे जैकोबी, गेगनबर, लॉगेर, हर्माइट, शेबीशेव, व्यापक बेटमैन, व्यापक रॉइस, होराडम, बेसल, बेडियन्ट तथा साथ ही असंतत बहुपद जैसे पॉस्टरनाक, हॉन, क्रॉवचौक, मेक्सनर, प्वॉसन-चॉरलियर बहुपदी के ऑयलरी समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं जिनको आगे दर्शाया गया है।

सूत्रों के घातांकों का भी विशेषीकरण इस प्रकार करने पर कि प्राप्त संबंध सत्य हो, अनेक सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं। जैसे बहुचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद में $p = q = 0$ लें तो यह बहुचरीय बहुपद तुरंत r भिन्न-भिन्न सिस्टर सेलिन बहुपद में टूट जाता है।

(i) सूत्र (2.1) में $p = q = m = c = d = 0$, $k_1 = 1$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, $e_2 = \rho_2 = 0$ रखने पर हमें एकचरीय सिस्टर सेलिन बहुपद का ऑयलरी सूत्र प्राप्त होता है : (सभी पादलिपियों (subscripts) को छोड़ने पर)

$$\int_a^b\left(t - a\right)^{\alpha - 1}\left(b - t\right)^{\beta - 1}\left(ut + v\right)^e f_n\left(zx\left(ut + v\right)^\rho\right) dt$$

$$= (b - a)^{\alpha + \beta - 1}(au + v)^e \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-e)_s}{s!}\left(\frac{-u(b - a)}{au + v}\right)^s B(\alpha + s, \beta)$$

$$\times f_n\begin{pmatrix}(1 + e : \rho), c' \\ & ; zx(au + v)^\rho \\ (1 + e - s : \rho), d''\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

(ii) सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1,\ c = d = 0;\ \alpha' s,\ \beta' s,\ \gamma' s,\ \delta' s$ को इकाई रखने तथा साथ ही

(a) $p = 1,\ a_1 = -n;\ q = 0;\ p_1 = 3,\ c'_1 = 1 + \alpha + \beta + n,\ c'_2 = \frac{1}{2},$

$c'_3 = 1;\ q_1 = 3,\ d'_1 = 1 + \alpha,\ d'_2 = -n,\ d'_3 = n + 1;\ p_2 = 3,$

$c''_1 = 1 + \alpha' + \beta' + n,\ c''_2 = \frac{1}{2},\ c''_3 = 1;\ q_2 = 3,\ d''_1 = 1 + \alpha',$

$d''_2 = -m,\ d''_3 = m + 1;\ X_1 \to \frac{1 - x_1}{2},\ Y_1 \to \frac{1 - y_1}{2}$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 3,\ c'_1 = 1 + \alpha + \beta + n,\ c'_2 = \frac{1}{2},\ c'_3 = 1;$

$q_1 = 2,\ d'_1 = 1 + \alpha,\ d'_2 = n + 1;\ p_2 = 3,\ c''_1 = 1 + \alpha' + \beta' + m,$

$c''_2 = \frac{1}{2},\ c''_3 = 1;\ q_2 = 2,\ d''_1 = 1 + \alpha',\ d''_2 = m + 1;$

$X_1 \to \frac{1 - x_1}{2},\ Y_1 \to \frac{1 - y_1}{2}$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः लेखक द्वारा परिभाषित द्विचरीय जैकोबी बहुपद[31] एवं एकचरीय जैकोबी बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1,\ t_1\right) P_n^{(\alpha,\beta:\alpha',\beta')}\left(X_1,\ Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\,(n\,!)^{-2}\left(1 + \alpha\right)_n\left(1 + \alpha'\right)_n\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1(-n:1,\ 1) : (1 + \alpha + \beta + n,\ 1), \left(\frac{1}{2},\ 1\right), (1,\ 1); \\ \Delta_2 \qquad\qquad : (1 + \alpha,\ 1), (-n,\ 1), (n + 1,\ 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}(1 + \alpha' + \beta' + n,\ 1), \left(\frac{1}{2},\ 1\right), (1,\ 1) \\ (1 + \alpha',\ 1), (-m,\ 1), (m + 1,\ 1)\end{matrix} ;\ \frac{1 - X_2}{2},\ \frac{1 - Y_2}{2}\right) \qquad (3.2)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) P_n^{(\alpha,\beta)}\left(X_1\right) P_n^{(\alpha',\beta')}\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\,(n!\; m!)^{-1}\left(1-\alpha\right)_n\left(1+a'\right)_m\left(b_1-a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2-a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (1+\alpha+\beta+n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 \qquad\qquad : (1+\alpha, 1), (n+1, 1):\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{matrix}(1+\alpha'+\beta'+m, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ (1+\alpha', 1), (m+1, 1)\end{matrix}\; ; \frac{1-X_2}{2}, \frac{1-Y_2}{2}\right) \qquad (3.3)$$

(iii) सूत्र (3.2) एवं (3.3) में $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$; $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \nu - 1/2$; $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = -1/2$; $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1/2$ रखने पर हमें क्रमशः द्विचरीय लेजेन्ड्रे, गेगनबर, शेबीशेव (I एवं II प्रकार) बहुपद[31] तथा उपरोक्त के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) P_n\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1-a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2-a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1(-n:1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \Delta_2 \qquad\qquad : (-n, 1); (-m, 1)\end{matrix}\; ; \frac{1-X_2}{2}, \frac{1-Y_2}{2}\right) \qquad (3.4)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) C_n^{\nu}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= \left((2\nu)_n (n!)^{-1}\right)^2 A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, (-n:1, 1) : (2\nu + n, + 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 \qquad : \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right), (-n, 1), (n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}(2\nu + n, + 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right), (-m, 1), (m+1, 1)\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \tag{3.5}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) T_n\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (-n:1, 1) : (n, 1), (1, 1); (n, 1), (1, 1) \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1); (-m, 1), (m+1, 1)\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \tag{3.6}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) U_n\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= n^2 A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (-n : 1, 1) : (2 + n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (-n, 1), (n + 1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}(2 + n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \left(\frac{3}{2}, 1\right), (-m, 1), (m + 1, 1)\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \qquad (3.7)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) P_n\left(X_1\right) P_m\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \Delta_2 : \quad \ldots; \qquad \ldots\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \qquad (3.8)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) C_n^{\nu}\left(X_1\right) C_m^{\nu}\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\,(n!\ m!)^{-1}\left(2\nu\right)_n\left(2\nu\right)_m\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (2\nu + n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right), (n + 1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}(2\nu + m, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right), (m + 1, 1)\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \tag{3.9}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) T_n\left(X_1\right) T_m\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (n, 1), (1, 1); (m, 1), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n + 1, 1); (m + 1, 1)\end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) U_n\left(X_1\right) U_m\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= n\, m\, A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n, m}\begin{pmatrix} \Delta_1 : (2 + n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (n + 1, 1); \end{pmatrix}$$

$$\times f_{n, m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : (2 + n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); (2 + m, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (n + 1, 1); \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), (m + 1, 1) \end{matrix} ; \frac{1 - X_2}{2}, \frac{1 - Y_2}{2}\right) \tag{3.11}$$

(iv) द्विचरीय लॉगरी बहुपद को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$L_n^{(\alpha, \alpha')}(x, y) = \frac{(1 + \alpha)_n (1 + \alpha')_n}{(n!)^2} \sum_{m_1 = 0}^{n} \sum_{m_2 = 0}^{n - m_1} \frac{(-n)_{m_1 + m_2}}{(1 + \alpha)_{m_1} (1 + \alpha')_{m_2}} \frac{x^{m_1}}{m_1!} \frac{y^{m_2}}{m_2!} \tag{3.12}$$

तथा

$$L_n^{(\alpha, \alpha')}(x, y) = \frac{(1 + \alpha)_n}{(n!)} L_n^{(\alpha)}(x) \tag{3.13}$$

जहाँ पर $L_n^{(\alpha)}(x)$ प्रचलित एकचरीय लॉगरी बहुपद [10; eq (1), p. 200] है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने, साथ ही

(a) $\quad p = 1,\ a_1 = n;\ q = 0;\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1;\ q_1 = 3,$

$$d'_1 = -n,\ d'_2 = n+1,\ d'_3 = 1+\alpha\ ;;\ p_2 = 2,\ c''_1 = \frac{1}{2},$$

$$c''_2 = 1\ ;\ q_2 = 3,\ d''_1 = 1 + - m,\ d'_2 = m+1,\ d''_3 = 1+\alpha'$$

(b) $$p = q = 0,\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1\ ;\ q_1 = 2,\ d'_1 = n+1,$$

$$d'_2 = 1+\alpha\ ;\ p_2 = 2,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1;\ q_2 = 2,$$

$$d''_1 = m+1,\ d''_2 = 1+\alpha'$$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरी लॉगरी बहुपद एवं एकचरीय लॉगरी बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) L_n^{(\alpha, \alpha')}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (n!)^{-2} A\left(1+\alpha\right)_n\left(1+\alpha'\right)_n\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{array}{l} \Delta_1 : (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1), (1+\alpha, 1); \end{array}\right.$$

$$\left.\times \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ (-m, 1), (m+1, 1), (1+\alpha', 1) \end{array} ; X_2\ Y_2\right) \qquad (3.14)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) L_n^{(\alpha)}\left(X_1\right) L_m^{(\alpha')}\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\,(n\,!\,m\,!)^{-2}\left(1+\alpha\right)_n\left(1+\alpha'\right)_n\left(b_1-a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2-t_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n+1, 1), (1+\alpha, 1); (m+1, 1), (1+\alpha', 1)\end{matrix} ; X_2\, Y_2\right) \qquad (3.15)$$

(v) लेखक[32, 33] ने द्विचरीय हर्माइट बहुपद को निम्न प्रकार परिभाषित किया :

$$H_{n,m}(x, y) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n\,!\,m\,!\,(2r+2s)\,!\,(-1)^{r+s}\,(2x)^{n+m-2r-2s}\,(y+1)^{r+s}}{(2r)\,!\,(2s)\,!\,(r+s)\,!\,(n-2r)\,!\,(m+2s)\,!}$$

$$= (2x)^{n+m} \sum_{r=0}^{[n/2]} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{r+s}\left(\frac{-n}{2}\right)_r\left(\frac{-n+1}{2}\right)_r\left(\frac{-m}{2}\right)_s\left(\frac{-m+1}{2}\right)_s}{r\,!\,s\,!\left(\frac{1}{2}\right)_r\left(\frac{1}{2}\right)_s}$$

$$\times\left(-\frac{y+1}{x^2}\right)^r\left(-\frac{y+1}{x^2}\right)^s \qquad (3.16)$$

तथा

$$H_{n,0}(x, 0) = H_n(x) \qquad (3.17)$$

जहाँ पर $H_n(x)$ प्रचलित एकचरीय हर्माइट बहुपद [10; eq (2), p. 187] है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने, साथ ही

(a) $p = 1,\ a_1 = \frac{1}{2};\ q = 0;\ p_1 = 3,\ c'_1 = 1,\ c'_2 = -\frac{-n+1}{2};\ q_1 = 2,$

$d'_1 = -n,\ d'_2 = n+1;\ p_2 = 3,\ c''_2 = \frac{-m+1}{2};\ q_2 = 2,$

$d''_1 = -m,,\ d''_2 = m+1;\ X_1 \to -\frac{y_1+1}{x_1^2},\ Y_1 \to -\frac{y_1+1}{x_1^2}$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 4,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1,\ c'_3 = -\frac{n}{2},\ c'_4 = \frac{-n+1}{2};\ q_1 = 2,$

$d'_1 = -n,\ d'_2 = n+1;\ p_2 = 4,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1,\ c''_3 = -\frac{m}{2},$

$c''_4 = \frac{-m+1}{2};\ q_2 = 2,\ d''_1 = -m,\ d''_2 = m+1;\ X_1 \to -\frac{1}{x_1^2},\ Y_1 \to \frac{-1}{y_1^2}$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरी हर्माइट बहुपद एवं एकचरीय बहुपदों के गुणक वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right)\left(2X_1\right)^{-n-m} H_{n,m}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, \left(\frac{1}{2} : 1, 1\right), (1, 1), \left(-\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{-n+1}{2}, 1\right); \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(1, 1), \left(-\frac{m}{2}, 1\right), \left(\frac{-m+1}{2}, 1\right) \\ (-m, 1), (m+1, 1)\end{matrix}; -\frac{Y_2 + 1}{X_2^2}, -\frac{Y_2 + 1}{X_2^2}\right) \tag{3.18}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right)\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m} H_n\left(X_1\right) H_m\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, (1, 1), \left(\frac{1}{2} : 1\right), \left(-\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{-n+1}{2}, 1\right); \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(1, 1), \left(\frac{1}{2} : 1\right), \left(-\frac{m}{2}, 1\right), \left(\frac{-m+1}{2}, 1\right) \\ (-m, 1), (m+1, 1)\end{matrix}; -\frac{1}{X_2^2}, -\frac{1}{Y_2^2}\right) \tag{3.19}$$

(vi) द्विचरीय व्यापक बेटमैन बहुपद को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :—

$$Z_{n,m}(x, y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-n)_{r+s}\ (2\nu + n)_r\ (2\nu' + m)_r}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)_r (b+1)_r \left(\nu' + \frac{1}{2}\right)_s (b'+1)_s} \frac{x^r}{r!} \frac{y^s}{s!} \tag{3.20}$$

तथा

$$Z_{n,m}(x, 0) = Z_n(x) \tag{3.21}$$

जहाँ पर $Z_n(x)$ प्रचलित एकचरीय बेटमैन बहुपद [10; eq (9), p. 286] है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1,\ c = d = 0;\ a's,\ \beta's,\ \gamma's,\ \delta's$ को इकाई रखने पर, साथ ही

(a) $p_1 = 1,\ a_1 = -n;\ q = 0;\ p_1 = 3,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1,\ c'_3 = 2\nu + n;$

$q_1 = 4,\ d'_1 = -n,\ d'_2 = n+1,\ d'_3 = \nu + \frac{1}{2},\ d'_4 = b+1;\ p_2 = 3,$

$c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1,\ c''_3 = 2\nu' + m;\ q_2 = 4,\ d''_1 = -m,\ d''_2 = m+1,$

$d''_3 = \nu' + \frac{1}{2},\ d''_4 = b' + 1$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 3,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1,\ c'_3 = 2\nu + n;\ q_1 = 3,$

$d'_1 = n+1,\ d'_2 = \nu + \frac{1}{2};\ d'_3 = b+1;\ p_2 = 3,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1,$

$c''_3 = 2\nu' + m;\ q_2 = 3,\ d''_1 = m+1,\ d''_2 = \nu' + \frac{1}{2},\ d''_3 = b' + 1$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरी व्यापक बेटमैन बहुपद एवं एकचरीय बेटमैन बहुपदों वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) Z_{n,m}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{array}{l}\Delta_1 : (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (2\nu + n, 1); \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1), \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right) (b+1, 1);\end{array}\right.$$

$$\left.\times \begin{array}{l}\left(\frac{1}{2} : 1\right), (1, 1), (2\nu' + m, 1) \\ (-m, 1), (m+1, 1), \left(\nu' + \frac{1}{2}, 1\right), (b'+1, 1)\end{array} ; X_2\ Y_2\right) \quad (3.22)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) Z_n\left(\dot{X}_1\right) Z_m\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{array}{l}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (2\nu + n, 1); \\ \Delta_2 : (n+1, 1), \left(\nu + \frac{1}{2}, 1\right), (b+1, 1);\end{array}\right.$$

$$\left.\times \begin{array}{l}\left(\frac{1}{2} : 1\right), (1, 1), (2\nu' + m, 1) \\ (m+1, 1), \left(\nu' + \frac{1}{2}, 1\right), (b'+1, 1)\end{array} ; X_2, Y_2\right) \quad (3.23)$$

नोट : उपर्युक्त सूत्रों में $2\nu = 2\nu' = 1,\ b = b' = 0$ रखने पर हमें सरल बेटमैन बहुपद [10; q (2), p. 285] के सूत्र प्राप्त होंगे।

(vii) द्विचरीय व्यापक राईस बहुपद को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :—

$$H_{n,m}^{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')}\left(\xi, \lambda, \nu; \xi', \lambda', \nu'\right) = \frac{(\alpha + n)!\ (\alpha' + m)!}{n!\ m!\ \alpha!\ \alpha'!}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r}$$

$$\times \frac{(-n)_{r+s}(1+\alpha+\beta+n)_r(\xi)_r(1+\alpha'+\beta'+m)_r(\xi')_r(\nu)^r(\nu')^s}{m_1!\, m_2!\, (1+\alpha)_r\, (\lambda)_r\, (1+\alpha')_s\, (\lambda')_s} \tag{3.24}$$

तथा

$$H_{n,m}^{(\alpha,\beta,\alpha',\beta')}\left(\xi, \lambda, \nu; \xi', \lambda', 0\right) = H_n^{(\alpha,\beta)}\left(\xi, \lambda, \nu\right) \tag{3.25}$$

जहाँ पर $H_n^{(\alpha,\beta)}$ (ξ, λ, ν) प्रचलित राईस बहुपद हैं। साथ ही, यदि इसमें $\alpha = \beta = 0$ प्रतिस्थापित करें तो हमें सरल राईस बहुपद [10; eq (1), p. 287] प्राप्त होता है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने पर, साथ ही

(a) $p_1 = 1$, $a_1 = -n$; $q = 0$; $p_1 = 4$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$, $c'_3 = 1 + \beta + n$, $c'_4 = \xi$; $q_1 = 4$, $d'_1 = -n$, $d'_2 = n + 1$, $d'_3 = -\alpha$, $d'_4 = \lambda$; $p_2 = 4$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$, $c''_3 = 1 + \alpha' + \beta' + m$; $c''_4 = \xi'$; $q_2 = 4$, $d''_1 = -m$, $d''_2 = m + 1$, $d''_3 = 1 + \alpha'$, $d''_4 = \lambda'$

(b) $p = q = 0$; $p_1 = 4$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$, $c'_3 = \alpha + \beta + n$, $c'_4 = \xi$; $q_1 = 3$, $d'_1 = n + 1$, $d'_2 = 1 + \alpha$, $d'_3 = \lambda$, $p_2 = 4$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$, $c''_3 = 1 + \alpha' + \beta' + m$; $c''_4 = \xi'$; $q_2 = 3$, $d''_1 = m + 1$, $d''_2 = 1 + \alpha'$, $d''_3 = \lambda'$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय व्यापक राईस बहुपद एवं एकचरीय व्यापक राईस बहुपद के गुणन, वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) H_{n,m}^{(\alpha,\beta,\alpha',\beta')}\left(\xi, \lambda, X_1; \xi', \lambda', Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\alpha+\beta+n, 1), (\xi, 1); \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1), (1+\alpha, 1); (\lambda, 1)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\alpha'+\beta'+m, 1), (\xi', 1) \\ (-m, 1), (m+1, 1), (1+\alpha', 1), (\lambda', 1)\end{matrix} ; X_2 . Y_2\right) \quad (3.26)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) H_n^{(\alpha,\beta)}\left(\xi, \lambda, X_1\right) H_m^{(\alpha',\beta')}\left(\xi', \lambda', Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\alpha+\beta+n, 1), (\xi, 1); \\ \Delta_2 : (n+1, 1), (1+\alpha, 1); (\lambda, 1)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\alpha'+\beta'+m, 1), (\xi', 1) \\ (m+1, 1), (1+\alpha', 1), (\lambda', 1)\end{matrix} ; X_2, Y_2\right) \quad (3.27)$$

(viii) द्विचरीय होराडम बहुपद को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$P_n^{\lambda,\lambda'}(x, y) = \frac{(\lambda)_n (\lambda')_n}{(n!)^2}(2x + 2y - 1)^n$$

$$= \frac{(\lambda)_n (\lambda')_n (2x)^n}{(n!)^2} \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}}{r!\, s!} \left(\frac{1}{2x}\right)^r \left(\frac{-y}{x}\right)^s \tag{3.28}$$

तथा

$$P_n^{\lambda, \lambda'}(x, 0) = \frac{(\lambda')_n}{n!} P_n^{\lambda}(x) \tag{3.29}$$

जहाँ पर $p_n^{\lambda}(x)$ प्रचलित होराडम बहुपद[5] है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $\alpha' s, \beta' s, \gamma' s, \delta' s$ को इकाई रखने पर, साथ ही

(a) $p = 1,\ a_1 = -n;\ q = 0;\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1;$

$q_1 = 2,\ d'_1 = -n,\ d''_2 = n+1;\ p_2 = 2,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1;$

$q_2 = 2,\ d''_1 = -m,\ d''_2 = m+1;\ X_1 \to \frac{1}{2x_1},\ Y_1 \to \frac{-Y_1}{X_1}$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1;\ q_1 = 1,\ d'_1 = n+1;$

$p_2 = 2, c''_1 = \frac{1}{2}, c''_2 = 1;\ q_2 = 1, d''_1 = m+1;\ X_1 \to \frac{1}{2x_1}, Y_1 \to \frac{-Y_1}{2Y_1}$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय होराडम बहुपद एवं एकचरीय होराडम बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) \left(2X_1\right)^{-n} P_n^{\lambda, \lambda'}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\lambda)_n (\lambda')_n (n!)^{-2} A \left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : (-n : 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1); (-m, 1), (m+1, 1) \end{matrix} ; \frac{1}{2X_2}, \frac{Y_2}{X_2}\right) \tag{3.30}$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right)\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m} P_n^{\lambda}\left(X_1\right) P_m^{\lambda'}\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\lambda)_n (\lambda')_m (n!\, m!)^{-1} A\left(b_1-a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2-a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n+1, 1); (m+1, 1)\end{matrix} ; \frac{1}{2X_2}, \frac{Y_2}{2Y_2}\right) \tag{3.31}$$

(ix) लेखक[34] द्वारा परिभाषित द्विचरीय बेसल बहुपद को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$y_{n,m}^{\alpha,\beta}(x, y) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-s} \frac{(-n)_{r+s}(1+\alpha+n)_r (1+\beta+m)_s}{r!\, s!}\left(-\frac{x}{2}\right)^r\left(-\frac{y}{x}\right)^s \tag{3.32}$$

तथा

$$y_n^{(\alpha,\beta)}(x, 0) = y_n^{(\alpha)}(x) \tag{3.33}$$

$$y_n^{(\alpha-2)}\left(\frac{2x}{b}\right) = y_n(a, b, x), \tag{3.34}$$

$$y_n^{(0)}(x) = y_n(x) \tag{3.35}$$

जहाँ पर $y_n(a, b, x)$ एवं $y_n(x)$ क्रमशः व्यापक बेसल बहुपद तथा सरल बेसल बहुपद [10; eq (2), (1), 294, 293] हैं।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने के साथ ही

(a) $p = 1, a_1 = -n; q = 0; p_1 = 3, c'_2 = \frac{1}{2}, c'_2 = 1;$

$c'_3 = 1 + \alpha + n; q_1 = 2, d'_1 = n, d'_2 = n + 1; p_2 = 3,$

$c''_1 = \frac{1}{2}, c''_2 = 1, c''_3 = 1 + \beta + m; q_2 = 2, d''_1 = -m,$

$$d''_2 = m + 1 \; ; \; X_1 \to -\frac{X_1}{2}, \; Y_1 \to -\frac{Y_1}{2}$$

(b) $$p = q = 0 \; ; \; p_1 = 3, \; c'_1 = \frac{1}{2}, \; c'_2 = 1, \; c'_3 = 1 + \alpha + n \; ;$$

$$q_1 = 1, \; d'_1 = n + 1 \; ; \; p_2 = 3, \; c''_1 = \frac{1}{2}, \; c''_2 = 1, \; c''_3 = 1 + \beta + m \; ;$$

$$q_2 = 1, \; d''_1 = m + 1 \; ; \; X_1 \to -\frac{X_1}{2}, \; Y_1 \to -\frac{Y_1}{2}$$

प्रतिस्थापित करने पर क्रमशः द्विचरीय बेसल बहुपद एवं एकचरीय बेसल बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं।

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) y_n^{(\alpha, \beta)}\left(X_1, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n, m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1 + \alpha + n, 1) \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n + 1, 1) \; ; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1 + \beta + m, 1) \\ (-m, 1), (m + 1, 1) \end{matrix} \; ; -\frac{X_2}{2}, \frac{-Y_2}{2}\right) \qquad (3.36)$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_1\right) y_n^{(\alpha)}\left(X_1\right) y_n^{(\beta)}\left(Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\alpha+n, 1); \\ \Delta_2 : (n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), (1+\beta+m, 1) \\ (m+1, 1)\end{matrix} ; -\frac{X_2}{2}, \frac{-Y_2}{2}\right) \tag{3.37}$$

(x) द्विचरीय बेडियन्ट बहुपद को लेखक द्वारा भिन्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है—

$$R_{n,m}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = \frac{(\beta)_n (\beta')_m (2x)^n (2y)^m}{n!\, m!}$$

$$\times \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n-m_1} \frac{(-n)_{m_1+m_2} \left(-\frac{n}{2}\right)_{m_1} \left(\frac{-n+1}{2}\right)_{m_1} (\gamma-\beta)_{m_1}}{m_1!\, m_2!\, (\gamma)_{m_1} (1-\beta-n)_{m_1}}$$

$$\times \frac{\left(\frac{-m}{2}\right)_{m_2} \left(\frac{-m+1}{2}\right)_{m_2} (\gamma'-\beta)_{m_2}}{(\gamma)_{m_2} (1-\beta'-m)_{m_2}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{y^2}\right)^{m_2} \tag{3.38}$$

$$G_{n,m}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = \frac{(\beta)_n (\beta')_m (\gamma)_n (\gamma')_m (2y)^m}{n!\, m!\, (\beta+\gamma)_n (\beta'-\gamma)_m}$$

$$\times \sum_{m_1=0}^{n} \sum_{m_2=0}^{n-m_1} \frac{(-n)_{m_1+m_2} \left(\frac{-n}{2}\right)_{m_1} \left(\frac{-n+1}{2}\right)_{m_1} (1-\beta-\gamma-n)_{m_1}}{m_1!\, m_2!\, (1-\beta-n)_{m_1} (1-\gamma-n)_{m_1}}$$

$$\times \frac{\left(\frac{-m}{2}\right)_{m_2} \left(\frac{-m+1}{2}\right)_{m_2} (1-\beta'-\gamma'-m)_{m_2}}{(1-\beta'-n)_{m_2} (1-\gamma'-n)_{m_2}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{y^2}\right)^{m_2} \tag{3.39}$$

तथा

$$R_{n,0}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = R_n(\beta, \gamma; x) \tag{3.40}$$

$$G_{n,0}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = R_n(\beta, \gamma; x) \tag{3.41}$$

जहाँ पर $R_n(\beta, \gamma; x)$, $G_n(\beta, \gamma; x)$ एकचरीय बेडियन्ट बहुपद [10; eq (1), (2), p. 297] है। साथ ही

$$\lim_{\gamma, \gamma' \to \infty} R_{n,m}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = C_{n,m}^{\beta, \beta'}(x, y) \tag{3.42}$$

$$\lim_{\gamma, \gamma' \to \infty} G_{n,m}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = C_{n,m}^{\beta, \beta'}(x; y) \tag{3.43}$$

$$\lim_{\beta, \beta' \to \infty} G_{n,m}(\beta, \gamma; x : \beta', \gamma'; y) = C_{n,m}^{\gamma, \gamma'}(x, y) \tag{3.44}$$

इसी प्रकार एकचरीय की सीमांत स्थितियों (limiting cases) के लिए देखें [10; eq (3), p. 297] एवं जहाँ पर $C_{n,m}^{\beta,\beta'}(x, y)$ लेखक द्वारा परिभाषित द्विचरीय गेगनबर बहुपद है।

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने के साथ ही

(a) $p = 1$, $a_1 = -n$; $q = 0$; $p_1 = 5$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$, $c'_3 = \frac{-n}{2}$,
$c'_4 = \frac{-n+1}{2}$, $c'_5 = \gamma - \beta$; $q_1 = 4$, $d'_1 = n$, $d'_2 = n+1$, $d'_3 = \gamma$,
$d'_4 = 1 - \beta - n$; $p_2 = 5$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$, $c''_3 = -\frac{m}{2}$, $c''_4 = \frac{-m+1}{2}$,
$c''_5 = \gamma' - \beta'$; $q_2 = 4$, $d''_1 = -m$, $d''_2 = m+1$, $d''_3 = \gamma'$,
$d''_4 = 1 - \beta' - m$; $X_1 \to \frac{1}{X_1^2}$, $Y_1 \to \frac{1}{Y_1^2}$

(b) $p = q = 0$, $p_1 = 5$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$, $c'_3 = \frac{-n}{2}$, $c'_4 = \frac{-n+1}{2}$,
$c'_5 = \gamma - \beta$; $q_1 = 3$, $d'_1 = n+1$, $d'_2 = \gamma$, $d'_3 = 1 - \beta - n$;
$p_2 = 5$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$, $c''_3 = -\frac{m}{2}$, $c''_4 = \frac{-m+1}{2}$, $c''_5 = \gamma' - \beta'$;
$q_2 = 3$, $d''_1 = m+1$, $d''_2 = \gamma'$, $d''_3 = 1 - \beta' - m$; $X_1 \to \frac{1}{X_1^2}$, $Y_1 \to \frac{1}{Y_1^2}$

(c) $p = 1$, $a_1 = -n$; $q = 0$; $p_1 = 5$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$, $c'_3 = \frac{-n}{2}$,
$c'_4 = \frac{-n+1}{2}$, $c'_5 = 1 - \beta - \gamma - n$; $q_1 = 4$, $d'_1 = n$, $d'_2 = n+1$,
$d'_3 = 1 - \beta - n$, $d'_4 = 1 - \gamma - n$; $p_2 = 5$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$,
$c''_3 = -\frac{m}{2}$, $c''_4 = \frac{-m+1}{2}$, $c''_5 = 1\ \beta' - \gamma' - m$; $q_2 = 4$, $d''_1 = -m$,

$d''_2 = m+1, d''_3 = 1-\beta'-m; d''_4 = 1-\gamma'-m;\ X_1 \to \frac{1}{X^2},\ Y_1 \to \frac{1}{Y_1^2}$

(d) $p = q = 0,\ p_1 = 5,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1,\ c'_3 = \frac{-n}{2},\ c'_4 = \frac{-n+1}{2},$

$c'_5 = 1 - \beta - \gamma - n;\ q_1 = 3,\ d'_1 = n+1,\ d'_2 = 1 - \beta - n,$

$d'_3 = 1 - \gamma - n;\ p_2 = 5,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1,\ c''_3 = -\frac{m}{2},$

$c''_4 = \frac{-m+1}{2},\ c''_5 = 1 - \beta' - \gamma' - m;\ q_2 = 3,\ d''_1 = m+1,$

$d''_2 = 1 - \beta' - m,\ d''_3 = 1 - \gamma' - m;\ X_1 \to \frac{1}{X^2},\ Y_1 \to \frac{1}{Y^2}$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय बहुपद एवं एकचरीय बेडियन्ट बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m}$$

$$\times R_{n,m}\left(\beta, \gamma;\ X_1 : \beta', \gamma';\ Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\beta)_n\, (\beta')_m\, (n!\, m!)^{-1}\, A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1,\ (-n,1,1) : \left(\frac{1}{2},1\right),\ (1,1),\ \left(-\frac{n}{2},1\right),\ \left(\frac{-n+1}{2},\ 1\right),\ (\gamma-\beta,1); \\ \Delta_2 \qquad : (-n,\ 1),\ (n+1,\ 1)\ (\gamma,\ 1),\ (1-\beta-n,\ 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2} : 1\right),\ (1,\ 1),\ \left(-\frac{m}{2},\ 1\right),\ \left(\frac{-m+1}{2},\ 1\right),\ (\gamma'-\beta', 1); \\ (-m,\ 1),\ (m+1,\ 1)\ (\gamma',\ 1),\ (1-\beta'-m',\ 1)\end{matrix} ;\ \frac{1}{X_2^2},\ \frac{1}{Y_2^2}\right)$$

(3.45)

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m}$$

$$\times R_n\left(\beta, \gamma;\ X_1\right) R_m\left(\beta', \gamma';\ Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\beta)_n (\beta')_m (n!\, m!)^{-1} A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1), \left(-\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{-n+1}{2}, 1\right), (\gamma-\beta, 1); \\ \Delta_2 \;\; : \;\; (n+1, 1)\,(\gamma, 1), (1-\beta-n, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2} : 1\right), (1, 1), \left(-\frac{m}{2}, 1\right), \left(\frac{-m+1}{2}, 1\right), (\gamma'-\beta', 1); \\ (m+1, 1)\,(\gamma', 1), (1-\beta'-m', 1)\end{matrix} ; X_2^{-2}, Y_2^{-2}\right)$$

(3.46)

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m}$$

$$\times G_{n,m}\left(\beta, \gamma;\; X_1 : \beta', \gamma';\; Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\beta)_n (\beta')_m (\gamma)_n (\gamma')_m \left[n!\, m!\, (\beta+\gamma)_n (\beta'+\gamma')_m\right]^{-1}$$

$$\times A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, (-n, 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1), \left(-\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{-n+1}{2}, 1\right), (1-\beta-\gamma-n, 1); \\ \Delta_2 \;\; : (-n, 1), (n+1, 1), (1-\beta-n, 1), (1-\gamma-n, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1), \left(\frac{-m}{2}, 1\right), \left(\frac{-m+1}{2}, 1\right), (1-\beta'-\gamma'-m, 1); \\ (-m, 1), (m+1, 1), (1-\beta'-m', 1), \;\; (1-\gamma'-m, 1)\end{matrix} ; X_2^{-2}, Y_2^{-2}\right)$$

(3.47)

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}\left(2X_1\right)^{-n}\left(2Y_1\right)^{-m}$$

$$\times\, G_n\left(\beta, \gamma ;\, X_1\right) G_m\left(\beta', \gamma' ;\, Y_1\right) dt_1\, dt_2$$

$$= (\beta)_n\, (\beta')_m\, (\gamma)_n\, (\gamma')_m \left[\, n!\; m!\, (\beta+\gamma)_n\, (\beta'+\gamma')_m \right]^{-1}$$

$$\times\, A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, :\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1), \left(-\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{-n+1}{2}, 1\right), (1-\beta-\gamma-n, 1); \\ \Delta_2 : \quad (n+1,\, 1),\, (1-\beta-n,\, 1),\, (1-\gamma-n, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix}\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1,1), \left(\frac{-m}{2}, 1\right), \left(\frac{-m+1}{2}, 1\right), (1-\beta'-\gamma'-m, 1); \\ (m+1,\, 1),\, (1-\beta'-m',\, 1),\; (1-\gamma'-m,\, 1)\end{matrix} ;\, X_2^{-2},\, Y_2^{-2}\right) \tag{3.48}$$

अब हम कुछ असंतत बहुपदों वाले ऑयलरी समाकल ज्ञात करेंगे— जैसे पॉस्टरनॉक, हॉन, क्रॉवचौक, मेक्सनर एवं प्वॉसन-चार्लियर बहुपद।

(xi) लेखक ने द्विचरीय पॉस्टरनॉक बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$F_{n,m}^{\lambda', \lambda'}(z, z') = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\, (n+1)_r \left(\frac{(z+1+\lambda}{2}\right)_r (m+1)_s \left(\frac{(z'+1+\lambda'}{2}\right)_s}{r!\; s!\; (1)_r\, (1+\lambda)_r\, (1)_s\, (1+\lambda')_s} \tag{3.49}$$

तथा
$$F_{n,m}^{\lambda, -1-z'}(z, z') = F_n^{\lambda}(z) \tag{3.50}$$

जहाँ पर $F_n^{\lambda}(z)$ प्रचलित पॉस्टरनॉक बहुपद [10; eq (3), p. 291] है। साथ ही

$$\lim_{\lambda \to \infty} F_n^{z\lambda}(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\; n+1 \\ 1\end{matrix} ;\, \frac{1}{2}\right) \tag{3.51}$$

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} F_{n,m}^{z\lambda, z'\lambda'}(z, z') = f_{n,m}\left(\begin{matrix}(-n : 1,\, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ - : (-n,\, 1);\, (-m,\, 1)\end{matrix} ;\, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{3.52}$$

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $\alpha' s$, $\beta' s$, $\gamma' s$, $\delta' s$ को इकाई रखने के साथ ही

(a) $p = 1,\ a_1 = -n;\ q = 0;\ p_1 = 1,\ c'_1 = \frac{1}{2};\ q_1 = 1,\ d'_1 = -n;$

$c''_1 = \frac{1}{2};\ q_2 = 1,\ d''_1 = -m;\ X_1 \to \frac{1}{2},\ Y_1 \to \frac{1}{2}$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 1,\ c'_1 = \frac{1}{2};\ q_1 = 0,\ p_2 = 1,\ c''_1 = \frac{1}{2};\ q_2 = 0,\ X_1 \to \frac{1}{2},\ Y_1 \to \frac{1}{2}$

प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय पॉस्टरनॉक बहुपद एवं एकचरीय पॉस्टरनॉक बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F_{n,m}^{z\lambda, z'\lambda'}(z, z')\, dt_1\, dt_2 = A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1\,(-n : 1,\ 1) : \left(\frac{1}{2},\ 1\right);\ \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \\ \Delta_2 : (-n,\ 1);\qquad (-m,\ 1) \end{matrix};\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \tag{3.53}$$

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F_{n}^{z\lambda}(z)\, F_{m}^{z'\lambda'}(z')\, dt_1\, dt_2 = A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : \left(\frac{1}{2},\ 1\right);\ \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \\ \Delta_2 : -\ ;\ - \end{matrix};\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \tag{3.54}$$

(xii) लेखक ने द्विचरीय क्रॉवचौक बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$K_n(x', \lambda, N : y;\ \lambda', N') = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\,(-x)_r\,(-y)_s}{r!\ s!\ (-N)_r\ (-N')_s} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^r \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^s \tag{3.55}$$

तथा

$$K_n(x\,;\,\lambda\,,\,N\,:\,0\,;\,\lambda',\,N') = K_n(x\,;\,\lambda\,,\,N) \tag{3.56}$$

जहाँ पर $K_n(x\,;\,\lambda\,,\,N)$ प्रचलित क्रॉवचौक बहुपद [11; eq (1.33), p.542] है; साथ ही

$$P_n^{(a,-n)}\left(1-\frac{2x}{\lambda}\right) = \frac{(1+\alpha)_n}{n\,!}\lim_{N\to\infty} K_n(Nx\,;\,\lambda\,,\,N) \tag{3.57}$$

$$P_n^{(\alpha,-n;\alpha',-n)}\left(1-\frac{2x}{\lambda},\,1-\frac{2y}{\lambda'}\right) = \frac{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha')_n}{(n\,!)^2}$$

$$\times\lim_{N'\to\infty} K_n(xN;\,\lambda\,,\,N\,:\,yN';\,\lambda',N') \tag{3.58}$$

सूत्र (3.2) एवं (3.3) में $\beta = \beta' = -n$; $X_1 \to 1-\frac{2X_1}{\lambda'}$, $Y_1 \to 1-\frac{2Y_1}{\lambda'}$ वाले सूत्र (3.58) का प्रयोग करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय क्रॉवचौक बहुपद एवं एकचरीय क्रॉवचौक बहुपदों वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\lim_{N,N'\to\infty}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1,\,t_2\right)K_n\left(X_1\,N;\,\lambda\,,\,N\,:\,Y_1N';\,\lambda'N'\right)\,dt_1\,dt_2$$

$$= A\left(b_1-a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2-a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1\,,\,(-n:1,\,1)\,:\,\left(\frac{1}{2},\,1\right),\,(1,\,1)\,;\,\left(\frac{1}{2},\,1\right),\,(1,\,1)\\ \Delta_2\,:\,(-n,\,1),\,(n+1,\,1)\,;\,(-m,\,1),\,(m+1,\,1)\end{matrix}\;;\;\frac{X_2}{\lambda},\,\frac{Y_2}{\lambda'}\right) \tag{3.59}$$

$$\lim_{N,N'\to\infty}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1,\,t_2\right)K_n\left(X_1\,N;\,\lambda\,,\,N\right)\,K_m\left(Y_1N';\,\lambda'N'\right)\,dt_1\,dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n+1, 1); (m+1, 1)\end{matrix} ; \frac{X_2}{\lambda}, \frac{Y_2}{\lambda'}\right) \tag{3.60}$$

(xiii) लेखक ने द्विचरीय हॉन बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$Q_n(x; \alpha, \beta, N : y; \alpha', \beta', N')$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\,(1+\alpha+\beta+n)_r\,(-x)_r\,(1+\alpha'+\beta'+n)_s\,(-y)_s}{r!\,s!\,(1+\alpha)_r\,(-N)_r\,(1+\alpha')_s\,(-N')_s} \tag{3.61}$$

तथा

$$Q_n(x; \alpha, \beta, N : O; \alpha', \beta', N') = Q_n(x; \alpha, \beta, N) \tag{3.62}$$

जहाँ पर $Q_n(x; \alpha, \beta, N)$ प्रचलित हॉन बहुपद[11; eq (1.31), p.541] है, साथ ही

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \lim_{N \to \infty} Q_n(xN; \alpha, \beta, N) \tag{3.63}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta;\alpha',\beta')}(1-2x, 1-2y) = \frac{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha')_n}{(n!)^2}$$

$$\times \lim_{N, N' \to \infty} K_n(xN; \alpha, \beta, N : yN'; \alpha', \beta', N') \tag{3.64}$$

सूत्र (3.2) एवं (3.3) में $X_1 \to 1 - 2X_1$, $Y_1 \to 1 - 2Y_1$ रखने एवं सूत्र (3.64), (3.63) का प्रयोग करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय हॉन बहुपद एवं एकचरीय हॉन बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\lim_{N, N' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1}\left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1}\left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1}\left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) Q_n\left(X_1 N; \alpha, \beta, N; Y_1 N'; \alpha', \beta', N'\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1} .$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1, (-n : 1, 1) : (1+\alpha+\beta+n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : (1+\alpha, 1); (-n, 1)\,(n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(1+\alpha'+\beta'+n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ (1+\alpha', 1), (-m, 1)\,(m+1, 1)\end{matrix}; X_2, Y_2\right) \tag{3.65}$$

$$\lim_{N, N' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) Q_n\left(X_1 N; \alpha, \beta, N\right) Q_m\left(Y_1 N'; \alpha', \beta', N'\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\Delta_1 : (1+\alpha+\beta+n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \\ \Delta_2 : (1+\alpha, 1); (n+1, 1);\end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix}(1+\alpha'+\beta'+n, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ (1+\alpha', 1), (m+1, 1)\end{matrix}; X_2, Y_2\right) \tag{3.66}$$

(xiv) लेखक ने द्विचरीय मैक्सनर बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$M_n(x; \beta, \lambda; y; \beta', \lambda')$$

$$= (\beta)_n\, (\beta')_n \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\, (-x)_r\, (-y)_s}{r!\, s!\, (\beta)_n\, (\beta')_n} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\lambda'}\right)^s \tag{3.67}$$

तथा

$$M_n(x; \beta, \lambda : 0; \beta', \lambda') = M_n(x; \beta, \lambda) \tag{3.68}$$

जहाँ पर $M_n(x\,;\,\beta\,,\,\lambda)$ प्रचलित मैक्सनर बहुपद [11; eq (1.34), p. 542] है। साथ ही

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_n\left(-\lambda x;\,\beta,\,\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = (\beta)_n\; {}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ \beta\end{matrix};\,x\right) = (\beta)_n\, f_n\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\,1\\ n+1,\,\beta\end{matrix};\,x\right) \tag{3.69}$$

$$\lim_{\lambda,\lambda'\to\infty} M_n\left(-\lambda x;\,\beta,\,\frac{\lambda}{\lambda-1}\,:\,-\lambda' y;\,\beta',\,\frac{\lambda'}{\lambda'-1}\right)$$

$$= (\beta)_n\,(\beta')_n \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\, x^r\, y^s}{r!\; s!\; (\beta)_r\; (\beta')_s}$$

$$= (\beta)_n\,(\beta')_n\, f_{n,m}\left(\begin{matrix}(-n\,:\,1,\,1)\,:\,\left(\frac{1}{2},\,1\right),\,(1,\,1)\,;\\ -\,:\,(-n,\,1)\,(n+1,\,1),\,(\beta,\,1)\,;\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}\left(\frac{1}{2},\,1\right),\,(1,\,1)\\ (-m,\,1)\,(m+1,\,1),\,(\beta',\,1)\end{matrix}\;;\,x,\,y\right) \tag{3.70}$$

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1,\ c = d = 0;\ a' s,\ \beta' s,\ \gamma' s,\ \delta' s$ को इकाई रखने के साथ ही

(a) $p_1 = 1,\ a_1 = -n;\ q = 0;\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1;\ q_1 = 3,\ d'_1 = -n,$

$d'_2 = n+1,\ d'_3 = \beta;\ p_2 = 2,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1;\ q_2 = 3,$

$d''_1 = -m,\ d''_2 = m+1,\ d''_3 = \beta'$

(b) $p = q = 0;\ p_1 = 2,\ c'_1 = \frac{1}{2},\ c'_2 = 1;\ q_1 = 2,\ d'_1 = n+1,\ d'_2 = \beta;$

$p_2 = 2,\ c''_1 = \frac{1}{2},\ c''_2 = 1;\ q_2 = 2,\ d''_1 = m+1,\ d''_2 = \beta'$

प्रतिस्थापित करने एवं संबंध (3.70), (3.69) का प्रयोग करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय मेक्सनर बहुपद एवं एकचरीय मेक्सनर बहुपदों के गुणन वाले आयलरी समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\lim_{\lambda,\lambda'\to\infty} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left(t_1-a_1\right)^{\alpha_1-1}\left(b_1-t_1\right)^{\beta_1-1}\left(t_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(b_2-t_2\right)^{\beta_2-1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) M_n\left(-\lambda X_1 ; \beta, \frac{\lambda}{\lambda-1} : \lambda' Y_1 ; \beta', \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A(\beta)_n (\beta')_n \left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1, (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (-n, 1)\ (n+1, 1), (\beta, 1);\ \ (-m, 1)\ (m+1, 1), (\beta', 1) \end{matrix} ; X_2, Y_2\right) \tag{3.71}$$

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) M_n\left(-\lambda X_1 ; \beta, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right) M\left(-\lambda' Y_1 ; \beta', \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A(\beta)_n (\beta')_n \left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2+\beta_2-1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1); \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n+1, 1), (\beta, 1), (m+1, 1), (\beta', 1) \end{matrix} ; X_2, Y_2\right) \tag{3.72}$$

(xv) लेखक ने द्विचरीय प्वॉसन-चार्लियर बहुपद को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है:

$$C_n(x ; \lambda, \lambda) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}\ (-x)_r\ (-y)_s}{r!\ s!} \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^r \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^s \tag{3.73}$$

तथा

$$C_n(x ; \lambda : 0\ \lambda) = C_n(x ; \lambda) \tag{3.74}$$

जहाँ पर $C_n(x ; \lambda)$ प्रचलित प्वॉसन-चार्लियर बहुपद [11, e1 (1.35), p. 542] है। साथ ही

$$\lim_{\lambda \to \infty} C_n\left(\lambda x ; \frac{1}{\lambda}\right) = {}_1F_0\left(\begin{matrix}-n \\ -\end{matrix} ; x\right) = f_n\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, 1 \\ n+1\end{matrix} ; x\right) \tag{3.75}$$

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} C_n\left(\lambda x ; \frac{1}{\lambda} : \lambda' y ; \frac{1}{\lambda'}\right) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n)_{r+s}}{r!\, s!} x^r y^s$$

$$= f_{n, m}\left(\begin{matrix} (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) ; \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ - : (-n, 1), (n+1, 1) ; (-m, 1), (m+1, 1) \end{matrix} ; x, y\right) \tag{3.76}$$

सूत्र (2.5) में $k_1 = k_2 = 1$, $c = d = 0$; $a's$, $\beta's$, $\gamma's$, $\delta's$ को इकाई रखने पर साथ ही

(a) $p_1 = 1$, $a_1 = -n$; $q = 0$; $p_1 = 2$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$; $q_1 = 2$, $d'_1 = -n$,

$d''_2 = n + 1$, $p_2 = 2$, $p_2 = 2$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$; $q_2 = 2$,

$d''_1 = -m$, $d''_2 = m + 1$

(b) $p = q = 0$; $p_1 = 2$, $c'_1 = \frac{1}{2}$, $c'_2 = 1$; $q_1 = 1$, $d'_1 = n + 1$;

$p_2 = 2$, $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 1$; $q_2 = 1$, $d''_1 = m + 1$

प्रतिस्थापित करने एवं संबंध (3.76), (3.75) का प्रयोग करने पर हमें क्रमशः द्विचरीय प्वॉसन-चार्लियर बहुपद एवं एकचरीय प्वॉसन-चार्लियर बहुपदों के गुणन वाले ऑयलरी समाकल प्राप्त होते हैं।

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) C_n\left(\lambda X_1 ; \frac{1}{\lambda} : \lambda' Y_1 ; \frac{1}{\lambda'}\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n, m}\left(\begin{matrix} \Delta_1, (-n : 1, 1) : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) ; \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (-n, 1), (n+1, 1) ; (-m, 1), (m+1, 1) \end{matrix} ; X_2, Y_2\right) \tag{3.77}$$

$$\lim_{\lambda, \lambda' \to \infty} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(t_1 - a_1\right)^{\alpha_1 - 1} \left(b_1 - t_1\right)^{\beta_1 - 1} \left(t_2 - a_2\right)^{\alpha_2 - 1} \left(b_2 - t_2\right)^{\beta_2 - 1}$$

$$\times F\left(t_1, t_2\right) C_n\left(\lambda X_1 ; \frac{1}{\lambda}\right) C_m\left(\lambda' Y_1 ; \frac{1}{\lambda'}\right) dt_1\, dt_2$$

$$= A\left(b_1 - a_1\right)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1} \left(b_2 - a_2\right)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}$$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix} \Delta_1 : \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) ; \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 1) \\ \Delta_2 : (n+1, 1) ; (m+1, 1) \end{matrix} ; X_2, Y_2\right) \tag{3.78}$$

4. भिन्नात्मक अवकलज (Fractional Derivatives)

एक, दो या बहुचरों के विशेष फलनों के भिन्नात्मक अवकलजों और भिन्नात्मक समाकलों के अभिकलन (Computations) की अधिक उपयोगिता होने के कारण इन सूत्रों का अत्यन्त महत्त्व है, जैसे श्रेणी और समाकलों के मूल्यांकन में[7, 36], जनक फलनों की व्युत्पत्ति में[18] और अवकल एवं समाकल और समीकरणों के हल को ज्ञात करने में[13, 7, 8, 19]। उपर्युक्त एवं अन्य दूसरे अनुप्रयोगों से प्रेरित होकर अनेक शोधकर्ताओं ने[6, 12, 17, 19-30] भिन्न-भिन्न विशेष फलनों को अन्तर्वलय करने वाले अनेक अवकलज सूत्रों को ज्ञात किया।

ओल्धम तथा स्पेनियर[9] की परिभाषा का अनुसरण करते हुए एक-चरीय फलन $f(x)$ के u संमिश्र कोटि के भिन्नात्मक अवकलज को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :–

$${}_{\alpha}D_x^{\mu}(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_{\alpha}^{x} (x - t)^{-\mu - 1} f(t)\, dt, \quad (\alpha \in R, \ \mathrm{Re}(\mu) < 0)$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}\, {}_{\alpha}D_x^{\mu - m}(f(x)), \quad 0 \le \mathrm{Re}(\mu) < m \tag{4.1}$$

जहाँ पर m एक धनात्मक पूर्णांक है बशर्ते कि समाकल विद्यमान हो। यदि $a = 0$ हो जाये तो संकारक D प्रचलित रीमन-लियाविले भिन्नात्मक अवकलज में परिवर्तित हो जाता है।

हम यहाँ पर एकचरीय फलन के भिन्नात्मक संकारक परिभाषा (4.1) के अनुरूप (analogue) द्विचरीय एवं बहुचरीय फलन के भिन्नात्मक संकारक को परिभाषित करेंगे, जो निम्न प्रकार से परिभाषित होता है :

$$ {}_{\alpha_1,\alpha_2}D^{\mu_1,\mu_2}_{x_1,x_2}\Big(f\big(x_1\,,\,x_2\big)\Big) = \frac{1}{\Gamma(-\mu_1)\Gamma(-\mu_2)} $$

$$ \times \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2}\big(x_1 - t_1\big)^{-\mu_1 - 1}\big(x_2 - t_2\big)^{-\mu_2 - 1} f\big(t_1 - t_2\big)\, dt_1\, dt_2 \qquad (4.2) $$

$$ {}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}D^{\mu_1,\ldots,\mu_r}_{x_1,\ldots,x_r}\Big(f\big(x_1,\ldots,x_2\big)\Big) = \frac{1}{\Gamma(-\mu_1)\ldots\Gamma(-\mu_r)} $$

$$ \times \int_{\alpha_1}^{x_1}\ldots\int_{\alpha_r}^{x_r}\big(x_1 - t_1\big)^{-\mu_1 - 1}\ldots\big(x_r - t_r\big)^{-\mu_r - 1} f\big(t_1\,\ldots\,t_2\big)\, dt_1\ldots dt_r \qquad (4.3) $$

जहाँ

$$ \alpha_i \in R,\ \mathrm{Re}(\mu_i) < 0\ (i = 1,\ \ldots,\ r) $$

अनुभाग 2 तथा 3 में दिये गये प्रत्येक ऑयलरी समाकल को उसके संगत भिन्नात्मक अवकलज में लिखा जा सकता है। परंतु यहाँ पर हम कुछेक ऑयलरी समाकलों को लेंगे।

सूत्र (2.1), (2.2) में सर्वप्रथम $x_i = x\ (i = 1,\ldots, r)$ रखने पर, तत्पश्चात् सूत्र (2.1), (2.2), (3.2) में $b_i = x_i\ (i = 1,\ldots, r)$ तथा सूत्र (3.1) में $b = x$ रखने पर तथा परिभाषा (4.1), (4.2), (4.3) का प्रयोग करने पर, हमें उपर्युक्त ऑयलरी समाकलों के संगत भिन्नात्मक अवकलज प्राप्त होते हैं :

$$ {}_{\alpha_1,\alpha_2}D^{-\beta_1,-\beta_2}_{x_1,x_2}\Big[\big(x_1 - x_2\big)^{\alpha_1 - 1}\big(x_2 - a_2\big)^{\alpha_2 - 1}\big(u_1 x_1 + v_1\big)^{e_1}\big(u_2 x_2 + v_2\big)^{e_2} $$

$$ \times f_{n,m}\Big(\big(z_1 x\big)^{k_1}\big(u_1 x_1 + v_1\big)^{\rho_1}\big(u_2 x_2 + v_2\big)^{\rho_2},\big(z_2 x\big)^{k_2}\big(u_1 x_1 + v_1\big)^{\sigma_1}\big(u_2 x_2 + v_2\big)^{\sigma_2}\Big)\Big] $$

$$ = \Big(\Gamma\big(\beta_1\big)\Gamma\big(\beta_2\big)\Big)^{-1}\big(x_1 - x_2\big)^{\alpha_1 + \beta_1 - 1}\big(x_2 - a_2\big)^{\alpha_2 + \beta_2 - 1}\big(a_1 u_1 + v_1\big)^{e_1}\big(a_2 u_2 + v_2\big)^{e_2} $$

$$ \times \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\frac{(-e_1)_{s_1}\ (-e_2)_{s_2}}{s_1!\ s_2!}\left(\frac{-u_1(x_1 - a_1)}{a_1 u_1 + v_1}\right)^{s_1}\left(\frac{-u_2(x_2 - a_2)}{a_2 u_2 + v_2}\right)^{s_2} $$

$$ \times B\big(\alpha_1 + s_1\,,\,\beta_1\big)\, B\big(\alpha_2 + s_2\,,\,\beta_2\big) $$

$$\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}\left(1+e_1:\rho_1,\sigma_1\right),\left(1+e_2:\rho_2,\sigma_2\right),\ a:c',c''\\ \left(1+e_1-s_1:\rho_1,\sigma_1\right),\left(1+e_2-s_2:\rho_2,\sigma_2\right),\ b:d',d''\end{matrix};\right.$$

$$\left.\times\left(z_1x\right)^{k_1}\left(a_1u_1+\nu_1\right)^{\rho_1}\left(a_2u_2+\nu_2\right)^{\rho_2}\left(z_2x\right)^{k_2}\left(a_1u_1+\nu_1\right)^{\sigma_1}\left(a_2u_2+\nu_2\right)^{\sigma_2}\right) \tag{4.3}$$

$${}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}D^{-\beta_1,\ldots,-\beta_r}_{x_1,\ldots,x_r}\left[\prod_{i=1}^{r}\left(x_i-a_i\right)^{\alpha_i-1}\left(u_1x_i-\nu_i\right)^{e_i}\right.$$

$$\left.\times f_{n_1,\ldots,n_r}\left(\left(z_1x\right)^{k_1}\prod_{i=1}^{r}\left(u_1x_1+\nu_1\right)^{\rho_i^{(1)}},\ldots,\left(z_1x\right)^{k_r}\prod_{i=1}^{r}\left(u_1x_1+\nu_1\right)^{\rho_i^{(1)}}\right)\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\left(\Gamma\left(\beta_i\right)\right)^{-1}\left(x_1-x_2\right)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left(a_iu_i+\nu_i\right)^{e_i}$$

$$\times\sum_{\substack{s_i=0\\(i=1,\ldots,r)}}^{\infty}\frac{(-e_i)_{s_i}}{s_i!}\left(\frac{-u_i(x_i-a_i)}{a_iu_i+\nu_i}\right)^{s_i}B\left(\alpha_i+s_i,\beta_i\right)$$

$$\times f_{n_1,\ldots,n_r}\left(\begin{matrix}\left(1+e_1:\rho_1^{(1)},\ldots,\rho_1^{(r)}\right),\ldots,\left(1+e_r:\rho_r^{(1)},\ldots,\rho_r^{(1)}\right),a:c';\ldots;c^r\\ \left(1+e_1-s_1:\rho_1^{(1)},\ldots,\rho_1^{(r)}\right),\ldots,\left(1+e_r-s_r:\rho_r^{(1)},\ldots,\rho_r^{(r)}\right),b:d',dr\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times\left(z_1x\right)^{k_1}\prod_{i=1}^{r}\left(a_iu_i+\nu_i\right)^{\rho_i^{(1)}},\ldots,\left(z_rx\right)^{k_r}\prod_{i=1}^{r}\left(a_iu_i+\nu_i\right)^{\rho_i^{(r)}}\right) \tag{4.4}$$

$${}_{\alpha}D_x^{-\beta}\left[(x-a)^{\alpha-1}(ux+\nu)^{e}f_n\left(zb(ux+\nu)^{\rho}\right)\right]$$

$$=\left(\Gamma\left(\beta_i\right)\right)^{-1}\left(x_1-x_2\right)^{\alpha+\beta-1}\left(au+\nu_i\right)^{e}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-e_i)_s}{s!}\left(\frac{-u(x-a)}{au+\nu}\right)^{s}B\left(\alpha+s,\beta\right)$$

$$\times f_n\left(\begin{matrix}(1+e:\rho),\ c':\\ (1+e-s;\rho),\ d':\end{matrix}\ zb(au+\nu)^{\rho}\right) \tag{4.5}$$

$$
{}_{\alpha_1,\alpha_2}D^{-\beta_1,-\beta_2}_{x_1,x_2}\Big[\left(x_1-x_2\right)^{\alpha_1-1}\left(x_2-a_2\right)^{\alpha_2-1}\left(u_1x_1+v_1\right)^{e_1}\left(u_2x_2+v_2\right)^{e_2}
$$

$$
\times P_n^{(\alpha,\beta,\alpha',\beta')}\left(\left(z_1\,x\right)\left(u_1x_1+v_1\right)^{\rho_1}\left(u_2x_2+v_2\right)^{\rho_2}\right.
$$

$$
\left.\times\left(z_2\,x\right)\left(u_1x_1+v_1\right)^{\sigma_1}\left(u_2x_2+v_2\right)^{\sigma_2}\right)\Big]
$$

$$
=\frac{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha')_n\,(x_1-a_1)^{\alpha_1+\beta_1-1}\,(x_2-a_2)^{\alpha_2+\beta_2-1}}{(n\,!)^2\;\Gamma(\beta_1)\;\Gamma(\beta_2)}
$$

$$
\times\left(a_1u_1+v_1\right)^{e_1}\left(a_2u_2+v_2\right)^{e_2}
$$

$$
\times\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{\infty}\frac{(-e_1)_{s_1}\,(-e_2)_{s_2}\,B(\alpha_1+s_1,\,\beta_1)\,(\alpha_2+s_2,\,\beta_2)}{r_1\,!\;s_2\,!}
$$

$$
\times\left(\frac{-u_1(x_1-a_1)}{a_1u_1+v_1}\right)^{s_1}\left(\frac{-u_2(x_2-a_2)}{a_2u_2+v_2}\right)^{s_2}
$$

$$
\times f_{n,m}\left(\begin{matrix}(1+e_1:\rho_1,\sigma_1),(1+e_2:\rho_2,\sigma_2),a:(1+\alpha+\beta+n,1)\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1);\\(1+e_1-s_1:\rho_1,\sigma_1),(1+e_2-s_2:\rho_2,\sigma_2),b:(1+\alpha,1);(-n,1)(n+1,1);\end{matrix}\right.
$$

$$
\times\begin{matrix}(1+\alpha'+\beta'+n,1),\left(\frac{1}{2},1\right),(1,1)\\(1+\alpha',1),(-m,1)(m+1,1)\end{matrix};\frac{1}{2}\left(-\left(z_1\,x\right)\left(a_1u_1+v_1\right)^{\rho_1}\left(a_2u_2+v_2\right)^{\rho_2}\right),
$$

$$
\left.\times\;\frac{1}{2}\left(1-\left(z_2\,x\right)\left(a_1u_1+v_1\right)^{\rho_1}\left(a_2u_2+v_2\right)^{\rho_2}\right)\right)\tag{4.6}
$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू. जी. सी. (CRO/Bhopal) के प्रति आभार व्यक्त करता है जिसने इस कार्य हेतु वित्तीय सहायता प्रदान की।

निर्देश

1. एक्सटॉन, एच. : Multiple Hypergeometric Functions and Applications, Oxford Univ., NY (1976).

2. एक्सटॉन, एच. : Handbook of Hypergeometric integrals, Theory, Applications, Tables, Computer Programs, Halsted Press, NY (1978).

3. फेसेनमायर, सिस्टर सेलिन एम. : Bull. Amer. Math. Soc. 1947, 53, 806-812.

4. फेसेनामयर, सिस्टर सेलिन एम. : Amer. Math. Monthly, 1949, 56, 14-17.

5. होराडम, ए. : Fibonacci Quart. 1985, 23, 295-299, 307.

6. मिलर, के. एस. तथा रॉस, बी. : An Introductions to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, NY (1993).

7. निशिमोटो के. : Fractional Calculus, Vol I-IV, Descrete Press, Koriyama (1984, 87, 89 तथा 1991).

8. निशिमोटो के. : Factional Calculus and it Applications, College of Engg. Nihon Univ. Koriyama (1990).

9. ओल्धम, के. बी. तथा स्पेनियर, जे. : Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, NY (1974).

10. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, Macmillan Co., NY (1967).

11. रॉसियाज, टी. एम., श्रीवास्तव, एच. एम. तथा यानूशाओसकास ए., : Topics in polynomials of One and Several variables and their Applications, World Scientific, London (1993).

12. शर्मा, सी. के. तथा सिंह, आई. जे. : Jnanabha, 1991, 21, 165-170.

13. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा बुशमैन, आर. जी. : Theory and Applications of Convolution integral equations, Kluwer Academic Publ. Dordrecht (1972).

14. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. : Nederl, Akad. Wentensch. Indag. Math. 1969, 31, 449-457.

15. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. : Math. Nachr. 1972, 53, 151-157.

16. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कार्लसन, पी. डब्लू. : Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press, NY (1985).. Nachr., 1972, 53, 151-157.

17. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा ओवा, एस. (Eds) : Univalent Functions, Fractional Calculus and their Applications, Halsted Press, NY (1989).

18. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मिनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, Halsted Press, NY (1989).

19. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा सेगो, एम. : J. Math. Anal. Appl. 1987, 121, 325-369.

20. श्रीवास्तव, एच. एम. सिंह, आर. सी. एम. तथा विश्वकर्मा, पी. के. : Math. Anal. Appl. 1994, 184-3, 560-572.

21. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा हुसैन, एम. ए. : Comp. Math. Appl. 1995, 30, 73-85.

22. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Vikram Math. J. 1995, 15, 41-46.

23. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math. 1996, 18-2, 225-239.

24. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian, Acad. Math. 1997, 19-1, 47-58.

25. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Vij. Par. Anu. Pat. 1998, 41-4, 233-351.

26. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Math. Comp. Appl. 1998, 8-2, 113-125.

27. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Vij. Par. Anu. Pat. 1999, 42-1, 113-125.

28. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math. 1999, 21-1, 89-106.

29. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math. 1999, 21-2, 255-270.

30. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Radovi Mat. 1999, 9, 203-217.

31. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Int. Trans. Sp. Funct. 2000, 10-1, 61-70.

32. श्रीवास्तव एच. एस. पी. : प्रकाशनाधीन.

33. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J., Indian Acad. Math. 2001, 14-1, 55-65.

34. श्रीवास्तव एच. एस. पी. : (प्रेषित).

35. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : (प्रेषित).

36. श्रीवास्तव, आर. : Some applications of fractional calculus (in Univalent Functions, Fractional calculus and their Applications, Eds. H.M. Srivastava and S. Owa, Halsted Press, NY (1989, p. 371-382).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

जामुन के बीज अंकुरण, अंकुरण की अवधि तथा बेडों की उत्तरजीविता पर बोने के समय का प्रभाव

विजय कुमार सिंह
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

तथा

आनन्द सिंह
इलाहाबाद कृषि संस्थान, नैनी, इलाहाबाद

[प्राप्त — जुलाई 1, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जामुन के बीजों की बुवाई के समय का प्रभाव बीजों के अंकुरण, अंकुरण की अवधि तथा बेडों की उत्तरजीविता पर ज्ञात किया गया। यह पाया गया कि नर्सरी में जुलाई माह में बोये गये जामुन के बीजों का अंकुरण सर्वाधिक रहा।

Abstract

Effect of sowing time on seed germination, duration of germination and seeding survival in Jamun. *By* Vijay Kumar Singh, Banaras Hindu University, Varanasi and Anand Singh, Allahabad Agricultural Institute, Deemed University, Allahabad.

A field experiment was carried out during 2000-2001 to evaluate the effect of sowing time on seed germination, germination duration and seedling survival in Jamun at the Main Experiment Station, Department of Horticulture, N. D. U. A. T., Faizabad. The results revealed that Jamun seeds sown during July in the nursery bed gave maximum germination percentage, minimum germination duration and maximum seedling survival.

जामुन (Syzygium cumini Skeels) भारत का देशी लघु फल है। यह मिर्टेसी परिवार से सम्बन्धित है। जामुन के फल ताजे खाये जाये हैं। इनका उपयोग शर्बत, जैम, जेली, सिरका आदि बनाने में भी किया जाता है।[3] क्षारीय मिट्टियों में जामुन के बीजों के अंकुरण, बेडों की वृद्धि तथा उनके स्थायी रूप से जीवित रहने के लिए समुचित ज्ञान आवश्यक है। साथ ही वृक्षों की कलिकायन अवस्था का ज्ञान भी उचित होगा क्योंकि जामुन का समुचित बीजों के माध्यम से होता है। फलतः पौधों के टाइप, उत्पादकता, फल के आकार, गुणता में काफी अन्तर आता है। उपलब्ध साहित्य से ज्ञात होता है कि अभी तक जामुन बीजों के अंकुरण तथा बेडों की वृद्धि के विषय में कोई संस्तुति नहीं की गई है। फलतः प्रस्तुत अध्ययन को हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

यह प्रयोग नरेन्द्र देव कृषि तथा प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय फैजाबाद के उद्यानिकी विभाग के मुख्य प्रयोगात्मक केन्द्र पर सम्पन्न हुआ। इसमें रैंडमाइज्ड ब्लाक डिजाइन का अनुसरण किया गया और तीन तीन पुनरावृत्तियाँ की गईं। जामुन के बीजों के अंकुरण तथा बेडों के जीवित रहने पर बुवाई के समय के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए बुवाई सात अवधियों में की गई।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1

जामुन के बीजों के अंकुरण, अंकुरण की अवधि तथा बेडों की परउत्तरजीविता बुवाई के समय का प्रभाव

बुवाई का समय	बीज अंकुरण (%)	अंकुरण की अवधि दिन	बेडों की उत्तरजीविता (%)
30 जून	63.33	13	94.71
15 जुलाई	72.00	12	98.60
30 जुलाई	74.67	12	97.31
15 अगस्त	71.00	13	96.23
30 अगस्त	70.67	13	95.74
15 सितम्बर	62.33	14	93.71
30 सितम्बर	62.00	15	93.67
5 % पर C.D.	7.28	1.55	1.13

सारणी 1 में दिये गये आंकड़ों से पता चलता है कि जिन बीजों की बुवाई 30 जुलाई को की गई उनमें सर्वाधिक अंकुरण (74-67%) हुआ जबकि 30 सितम्बर को बोये गये बीजों में सबसे कम (62%) अंकुरण पाया गया। इसी प्रकार के परिणाम सुल्तान तथा सिंहरोट[4] ने भी प्राप्त किये हैं। उन्हें 7 अगस्त को बोये गये जामुन के बीजों से सर्वाधिक अंकुरण मिला (78%)।

उत्तर भारत में जामुन के बीज जुलाई मास में 25 × 15 से. मी. की दूरी पर 5-10 से. मी. गहराई पर बोये जाते हैं।[3] हमने देखा कि बीज बोने के 12 दिन बाद जामुन के बीजों का अंकुरण शुरू हुआ और बोने से 15 दिन बाद पूरा हो गया। यह भी स्पष्ट है कि बीज अंकुरण के लिए लगने वाले समय पर बोने के समय का सार्थक प्रभाव पड़ा। सबसे अधिक समय (15 दिन) 30 सितम्बर को बोये गये बीजों में लगा किन्तु 15 तथा 30 जुलाई को बोये गये बीजों में न्यूनतम समय (12 दिन) लगा। यदि ताजे फल बोये जाते हैं तो 17 से 21 दिनों में उच्च प्रतिशत अंकुरण होता है।[1] यदि बीजों को संग्रह किया जाता है तो उनकी अंकुरण क्षमता में तेजी से ह्रास होता है।

सारणी से यह भी पता चलता है कि बुवाई के समय का सार्थक प्रभाव बेडों की उत्तरजीविता पर पड़ता है। जिन बीजों को 15 जुलाई को बोया गया था उनमें उत्तरजीविता अन्य उपचारों की अपेक्षा उच्च थी। 30 सितम्बर को बोये गये बीज में न्यूनतम बेड उत्तरजीविता पाई गई।

निर्देश

1. हेज़, डब्लू. बी. : Fruit growing in India, Kitabistan, Allahabad : 1957, पृष्ठ 162-163.
2. मोरी, एच., टॉय, एल. आर. तथा वोल्फे, एच. एस. : Bull. Fla. Agric. Ext. Serv., 1941, 109, 96.
3. सिंह, श्याम, कृष्णमूर्ति, एस. तथा कत्याल, एस. एल. : Furit culture in Indi. I.C.A.R., New Delhi 1967 पृष्ठ 201-205.
4. सुल्तान, एस. तथा सिंहरोत, आर. एस. : Haryana J. Hort. Sci., 1984, 13 (3-4), 123-126.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

लवणीय मृदा में आँवले की पत्तियों में प्राप्य पोषकों पर ड्रिप सिंचाई तथा मल्चिंग विधियों का प्रभाव

आनन्द सिंह एवं मुहम्मद सुहैल
नरेन्द्र देव कृषि तथा प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय, फैजाबाद
तथा
फरहत ए. जरगर एवं प्रदीप कुमार सिंह
इलाहाबाद कृषि संस्थान, नैनी, इलाहाबाद

[प्राप्त —जून 11, 2000]

सारांश

नरेन्द्र देव कृषि एवं प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय, फैजाबाद के उद्यानिकी विभाग के मुख्य प्रयोग केन्द्र पर दो वर्षों तक आँवला की पत्तियों द्वारा ग्रहीत पोषक तत्वों के स्तर पर ड्रिप सिंचाई तथा मल्चिंग विधियों के प्रभाव का अध्ययन किया गया। यह देखा गया कि सिंचाई स्तर I_3 पर पत्तियों के नाइट्रोजन प्रतिशत पर सर्वाधिक प्रभाव पड़ा। धान के पुआल से मल्चिंग करने पर पत्तियों में नाइट्रोजन तथा पोटैसियम दोनों बढ़े।

Abstract

Effect of drip irrigation regimes and mulching methods on leaf nutrients of Aonla (Emblica officinalis, Gaertn.), Cv. N. A. 10, under sodic soil. *By* Anand Singh and Mohd Suhail, N. D. University of Agriculture and Technology, Kumarganj, Faizabad, U.P. and Farhad A. Zargar and Pradeep Kumar Singh, Allahabad Agricultural Institute (Deemed University), Allahabad, U.P.

The present investigation was carried out at Main Experiment Station, Department of Horticulture, N.D.U.A.T., Kumarganj, Faizabad, during the year 1996-97 and 1997-98 related the effect of drip irrigation regimes and mulching methods on leaf nutients uptake by aonla (Emblica

officinalis, Gaertn.), Cv. N.A.-10. A significant effect (2.52%) on leaf nitrogen was found in I_3 (IW/CPE = 0.6) irrigation regime, while phosphorus and potassium were recorded significantly highest in I_2 (IW/CPE = 0.8). Mulching with paddy straw produced significantly higher content of leaf nitrogen and potassium, while phosphorus was recorded high in black polythene. Interaction of these two factors gave maximum N, P and K, in I_3M_2, I_2M_1, and I_2M_2 combinations respectively.

आँवला (Emblica officinalis, Gaertn) को शुष्क प्रदेश के फलों का राजा कहा गया है। आयुर्वेदिक औषधियों में आँवले का अत्यधिक महत्व है। इसके फल विटामिन C के समृद्ध स्रोत हैं। इसका सघन वृक्षारोपण कार्य उत्तर प्रदेश के लवण-प्रभावित तथा वर्षा-आधारित क्षेत्रों में चल रहा है जिसमें आगरा, इटावा तथा बुन्देलखण्ड के अर्द्धशुष्क क्षेत्र सम्मिलित हैं। यद्यपि पहले से स्थापित आँवला के बगीचों में सामान्य भूमि होने पर सिंचाई की आवश्यकता नहीं पड़ती किन्तु बंजर भूमियों में शुष्क ग्रीष्म ऋतु में 15-20 दिनों के अन्तराल पर सिंचाई वांछनीय है। बिन्दु-बिन्दु सिंचाई (ड्रिप) के प्रयोग से जो प्रारम्भिक अध्ययन किये गये हैं[5] उनसे उत्साहवर्धक परिणाम प्राप्त हुए हैं। श्री निवास[8] ने आम के साथ जो प्रयोग किये हैं उनसे पता चला है कि प्रति सप्ताह 60 लीटर ड्रिप से आम की पैदावार लगभग 153% हो गई। वर्षों तक लगातार कार्बनिक अपशिष्ट की मल्चिंग से कार्बनिक पदार्थ की मात्रा एवं अन्तःस्यन्दन दर में सुधार आवेगा तथा विलेय लवणों की ऊर्ध्व दिशा में गति कम होगी और इस तरह से लवणप्रभावित मिट्टियों में विलेय लवणों की विषालुता से बचा जा सकता है।

प्रस्तुत शोधकार्य का उद्देश्य आँवला (Cv. N.A.-10) की पत्तियों में नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटैसियम की मात्रा पर बिन्दु-बिन्दु सिंचाई प्रभाव-क्षेत्रों तथा मल्चिंग के प्रभाव का अध्ययन करना है।

प्रयोगात्मक

नरेन्द्र देव कृषि एवं प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय, फैजाबाद के मुख्य प्रयोगात्मक केन्द्र में दो वर्षों तक (1996-97, 1997-98) एक क्षेत्रप्रयोग सम्पन्न किया गया। यह केन्द्र गंगा मैदान में समुद्र तल से 113 मीटर ऊँचाई पर स्थित है। क्षेत्र की मिट्टी के गुण इस प्रकार थे— pH = 8.86, ESP = 30.49, ECe = 3.7 m/mohs/cm, सिल्ट मिश्रित दोमट (बालू = 38.25%, सिल्ट = 41.90% तथा मृत्तिका 16.55%), उपलब्ध नाइट्रोजन 169.65 कि.ग्रा./हे. तथा कार्बनिक कार्बन 0.21%।

इस अध्ययन में रैंडम ब्लाक डिजाइन के अन्तर्गत चार पुनरावृत्तियाँ थीं जिसमें दो कारकों, चार सिंचाई प्रभावक्षेत्रों एवं तीन मल्चिंग विधियों के संयोग से कुल 12 उपचार किये गये। सिंचाई प्रत्येक तीन दिन के अन्तराल पर बूँद-बूँद सिंचाई (ड्रिप) विधि से की गई जो श्रेणी A मौसम पैन के 1.0, 0.8, 0.6 तथा 0.4 स्तरों पर थी। इन्हें क्रमशः I_1, I_2, I_3 तथा I_4 प्रभावक्षेत्रों द्वारा दर्शाया गया है।

मल्चिंग के लिए काली पालीथीन की शीट (M_1) जो 400 गेज की तथा 4×4 मी^{2} आकार की थी एवं पुआल (M_2) 20 किग्रा./बेसिन की दर से बिछायी गयी। नियन्त्रण प्रयोग (M_3) में कोई मल्चिंग नहीं की गई। प्रत्येक उपचार में दो वृक्ष 8×8 मी$_2$ दूरी पर थे। प्रत्येक की तीन पुनरावृत्तियाँ की गईं।

प्रयोग के प्रारम्भ में तथा अन्त में वृक्षों की टहनियों के मध्य भाग से 5-6 मास की प्रौढ़ पत्तियां चुनी गईं। इन्हें सुखाकर इनका विश्लेषण नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटैसियम के लिए किया गया। सारणी 1 में पत्तियों का आरंभिक पोषणीय स्तर दिया गया है।

सारणी 1

आँवला (Cv NA-10) की पत्तियों का आरंभिक पोषणीय स्तर

क्रमांक	पोषण तत्व	मान	मानक विधि
1.	नाइट्रोजन	2.07	पीच तथा ट्रैसी (1956)
2.	फास्फोरस	0.28	रिचार्ड्स (1954)
3.	पोटैसियम	1.43	जैक्सन (1973)

परिणाम तथा विवेचना

1996-97 तथा 1997-98 में आँवला की पत्तियों में N, P तथा K के जो आँकड़े प्राप्त किये गये, उनके मध्यमान सारणी 2 (a), (b), (c) में अंकित किये जा रहे हैं। सारणी 2 (a) से स्पष्ट है कि सिंचाई, मल्चिंग विधियों तथा इन दोनों उपचारों की अन्योन्य क्रिया से नाइट्रोजन मान सार्थक रूप से प्रभावित हुआ। ड्रिप सिंचाई I_3 (IW/CPP = 0.6) प्रभाव क्षेत्र पर सर्वाधिक नाइट्रोजन (2.52%) की उपस्थिति है। सीमित मात्रा में सिंचाई जल के प्रयोग से जल विलेय पोषक तत्वों का निक्षालन मूल-मंडलों से कम हो जाता है (पर्सर[7]) और धान की पुआल की मल्चिंग (M_2) से अधिकतम नाइट्रोजन (2.35%) प्राप्त हुआ। पत्तियों में नाइट्रोजन की मात्रा 2.0 से 2.81 प्रतिशत तक बदलती है और $I_3 M_2$ संयोग के सर्वाधिक (2.81%) पाई गई।

सारणी 2 (b) में आँवला की पत्तियों में फास्फोरस की औसत मात्राएं अंकित हैं। यह देखा जाता है कि I_2 (IW/VPE = 0.8) सिंचाई प्रभावक्षेत्र में सार्थक रूप से अधिकतम फास्फोरस 0.38 % था। सारणी 2 (c) से ज्ञात होता है कि मल्चिंग के कारण पत्तियों में पोटैसियम की मात्रा सर्वाधिक प्रभावित हुई। धान की पुआल की मल्चिंग (M_2) से सर्वाधिक पोटैसियम (2.15%) पाया गया। इसके बाद काली पालीथीन (M_1) तथा नियन्त्रण (M_3) में (2.15%)। सर्वाधिक पोटैसियम (2.26%) $I_2 M_2$ उपचार संयोग में पाया गया।

सारणी 2

ऑवला की पत्तियों में पोषणीय स्तर पर ड्रिप सिंचाई प्रभाव क्षेत्रों तथा मल्चिंग का प्रभाव

(a) नाइट्रोजन %)

मल्चिंग	सिंचाई (IW/CPE)				
	I_1	I_2	I_3	I_4	माध्य
M_1	2.15	2.32	2.39	2.39	2.31
M_2	2.11	2.39	2.81	2.10	2.35
M_3	2.08	2.18	2.36	2.11	2.18
माध्य	2.11	2.30	2.52	2.20	

CD (5%)
I = 0.108
M = 0.093
I × M = 0.186

(b) फास्फोरस (%)

मल्चिंग	सिंचाई (IW/CPE)				
	I_1	I_2	I_3	I_4	माध्य
M_1	0.41	0.45	0.44	0.42	0.43
M_2	0.30	0.34	0.32	0.31	0.32
M_3	0.34	0.35	0.34	0.34	0.34
माध्य	0.35	0.38	0.37	0.36	

CD (5%)
I = 0.013
M = 0.011
I × M = NS

(c) पोटैसियम (%)

मल्चिंग	सिंचाई (IW/CPE)				
	I_1	I_2	I_3	I_4	माध्य
M_1	1.88	2.00	1.89	1.59	1.84
M_2	2.10	2.26	2.15	2.13	2.16
M_3	1.50	1.69	1.64	1.51	1.59
माध्य	1.83	1.98	1.89	1.74	

CD (5%)
I = 0.038
M = 0.032
I × M = 0.065

पत्तियों में उच्चतर सान्द्रता से यह अनुमान लगाया गया कि उपलब्ध मृदा फास्फोरस उच्च तथा निम्न जल स्तरों पर न्यूनतर होगी।[1]

ऐसा सुविदित है कि पत्तियों में K की सान्द्रता फसल भार से व्युत्क्रम सम्बन्ध प्रदर्शित करती है।[1, 4]

दोनों वर्षों में धान की पुआल एक उत्तम मल्चिंग पदार्थ सिद्ध हुई। इसका कारण नमी का संरक्षण एवं अच्छा वातन हो सकता है। यही नहीं, धान की पुआल ने आसानी से विघटित होकर आँवले की जड़ों को अनुकूल परिस्थिति प्रदान की जिससे सम्भवतः पोषकों का शोषण ठीक विधि से हुआ। हमारे द्वारा प्राप्त परिणाम अन्य कार्यकर्ताओं से मेल खाते हैं।[2, 3, 6]

निर्देश

1. क्यूमिंग्स, जी. ए. : Potassium nutrition of decidous and small fruits, 1985, p. 1087-1104. In : Potassium in Agriculture. Amer. Soc. Agron., Crop. Sci. Soc. Amer., Madison Wis.
2. गुप्ता, जे. ए. तथा गुप्ता, जी. एन. : Agrochmica, 1987, 31 (3), 193-203.
3. मुस्तफा, एम. एम. : J. Hort. Sci. 1988, 63 (4), 711-716.
4. नील्सन, जी. एच., पार्चमचुक, पी., नील्सन, डी., बेरार्ड, आर. तथा होग, ई. जे. : J. Ame. Soc. Hort. Sci., 1995, 120 (6), 971-976.
5. पाठक, आर. के. : Aonla, ed. Handbook of Horticulture, Dr. K. L. Chandha, I.C.A.R., New Delhi, 2001, pp. 115-117.
6. पिनामोंटी, एफ., जोर्जी, जी., गपेरी, एफ., सिल्वेस्ट्री, एस. तथा शिंगरी, जी. : Acta. Horticulture, 1995, 383, 313-321.
7. पर्सर, जे. : Plasticulture, 1993, 99 : 11-18.
8. श्रीनिवास, के. : Drip irrigation in fruit crops, ed. Drip irrigation, University of Agricultural Sciences, Dharwad, 1997, पृष्ठ 85-95.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

(N, p, q) (E, 1) माध्य द्वारा अपनी फूरियर श्रेणी के वर्ग Lip α (0 < α ≤ 1) से सम्बन्धित सन्निकटन की मात्रा

वी. एन. त्रिपाठी तथा कमला प्रसाद
गणित विभाग, एस. बी. पी. जी. कालेज, बड़गाँव, वाराणसी (उ. प्र.)

[प्राप्त — 15 जुलाई 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में ऐसे फलन की सन्निकटन मात्रा का अध्ययन किया गया है जो अपनी फूरियर श्रेणी के वर्ग **Lip α (0 < α ≤ 1)** से (N, p, q) $(E, 1)$ माध्य से सम्बद्ध है और जहाँ (N, p, q) माध्य बार्वीन द्वारा परिभाषित सार्वीकृत नार्लुण्ड माध्य को दर्शाता है।

Abstract

On the degree of approximation to a function belonging to the class Lip α (0 < α ≤ 1) of its Fourier series by (N, p, q) (E, 1) means. *By* V. N. Tripathi and Kamala Prasad, Department of Mathematics, S. B. P. G. College, Baragaon, Varanasi, (U.P.).

Lal and Yadav[5] have obtained the degree of approximation of conjugates of Lipschitz's function by (C, 1) (E, 1) means. The present paper deals with a study on the degree of approximation to a function belonging to the class Lip α (0 < α ≤ 1) of its Fourier series by (N, p, q) (E, 1) means where (N, p, q) mean denotes the generalized Norlund mean defined by Borwein[2].

1. परिभाषा तथा संकेतन

एक अनन्त श्रेणी $\sum u_n$ अपने आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_n\}$ सहित योगफल s तक संकलनीय $(E, 1)$ कही जाती है यदि अनुक्रम प्रति अनुक्रम रूपान्तर जो

$$t_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k \tag{1.1}$$

द्वारा दिया जाता है s तक जाता है, ज्यों ज्यों $n \to \infty$ [हार्डी(1949) p 70]

माना कि $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}$ दो ऐसे अनृण अनुक्रम हैं कि

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \tag{1.2}$$

रूपान्तर {Sn} के $(N, p, q)\,(E, 1)$ रूपान्तर को बार्वीन[2] के अनुसार निम्नवत् दिया जाता है–

$$T_n^{p,q} = \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k\, t_k$$

$$= \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \left\{ \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} s_m \right\} \tag{1.3}$$

यदि $T_n^{p,q} \to s$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तो श्रेणी $\sum u_n$ या इसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम **{Sn}** योगफल **s** तक संकलनीय $(N, p, q)\,(E, 1)$ कहलाता है। माना कि $f(t)$ अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में 2π-आवर्ती तथा लेबेस्ग समाकलनीय फलन है तो फलन $f(t)$ की फूरियर श्रेणी को निम्नवत् व्यक्त किया जाता है–

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{1.4}$$

फलन f को $Lip\ \alpha\ (0 < \alpha \leq 1)$ से सम्बद्ध यानी $f \in Lip\ \alpha\ (0 < \alpha \leq 1)$ कहा जाता है यदि

$$|f(x+t) - f(x)| = O\left(|t|^{\alpha}\right) \tag{1.5}$$

समस्त x तथा t के लिए।

बिन्दु $t = x$ पर लिखेंगे

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2\pi R_n \sin\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \cos^k \frac{1}{2} \sin(k+1) \frac{1}{2}$$

$$\tau = \left[\frac{1}{t}\right], \ \frac{1}{t} \text{ का समाकल अंश।}$$

(1.5) से यह निकलता है कि

$$\phi(t) = O\left(|t|^{\alpha}\right) \tag{1.6}$$

समस्त x तथा t के लिए।

n कोटि वाले त्रिकोणमितीय σ_n को फलन $f : (-\pi, \pi) \to R$ की सन्निकटन मात्रा को निम्नवत् द्वारा परिभाषित किया जाता है

$$\left|\left|\sigma_n - f\right|\right| = \sup_{-\pi \leq x \leq \pi} \left|\sigma_n(x) - f(x)\right| \tag{1.7}$$

2. प्रस्तावना तथा ज्ञात परिणाम

फलन $f \in Lip\,\alpha\ (0 < \alpha \leq 1)$ के लिए फलन f की फूरियर श्रेणी की सन्निकटन मात्रा का अध्ययन सेसेरो माध्य तथा नार्लुण्ड माध्य द्वारा किया जा चुका है।[1, 3, 4, 7, 8, 9] इस सम्बन्ध में लाल तथा यादव ने[5] $(C, 1)\ (E, 1)$ माध्य द्वारा लिपश्चिट्ज फलन के पूरकों की सन्निकटन मात्रा निम्नांकित को सिद्ध करते हुए की है–

प्रमेय A : यदि $f : R \to R$ 2π.-आवर्ती तथा $Lip\,\alpha$ हो तो इसके संयुग्मी फलन f की सन्निकटन मात्रा $(C, 1)\ (E, 1)$ माध्य द्वारा फ़लन f की फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी कें लिए $n = 0, 1, 2$ हेतु तुष्ट होता है।

$$||(C, E)_n^1 - \bar{f}||_\infty = \begin{cases} O\left[\dfrac{1}{(n+1)\alpha}\right], & \text{if } 0 < \alpha < 1 \\ O\left[\dfrac{\log(n+1)e\pi}{n+1}\right], & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

जहाँ $(C, E)_n^1$ द्वारा श्रेणी (1.4) की संयुग्मी श्रेणी का (C, 1) (E, 1) माध्य

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cos nt - a_n \sin nt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$$

द्वारा दर्शाया जाता है।

3. मुख्य परिणाम

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने निम्नांकित की स्थापना के द्वारा फलन $f \in Lip\,\alpha$ की फूरियर श्रेणी की सन्निकटन मात्रा को $(N, p, q)(E, 1)$ माध्यों द्वारा प्राप्त करने का प्रयास किया है।

प्रमेय : माना कि $\{p_n\}$ तथा $\{q_n\}$ दो अनृण एकस्वरिक अवर्धमान अनुक्रम हैं अचरों के जिससे कि

$$R_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-k}\, q_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_k\, q_{n-k}$$

$$= p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \ldots + p_0 q_n$$

अनन्त तक जाता है ज्यों-ज्यों n अनन्त तक जाता है।

माना कि $f \in$ Lip α $(0 < \alpha \le 1)$ 2π-आवर्ती तथा लेबेस्ग समाकलनीय फलन है अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में। माना कि $\sigma_n(x)$ फलन $f(t)$ की फूरियर श्रेणी (1.4) का $(N, p, q)(E, 1)$ रूपान्तर बिन्दु $x = t$ पर अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में है तो (N, p, q) माध्यों द्वारा फलन $f \in Lip\,\alpha$ की फूरियर श्रेणी की सन्निकटन मात्रा को $||\sigma_n(x) - f(x)|| = O\left(n^{-\alpha}\right)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

4. प्रमेयिकाएं

हमें अपने प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 : [मकफैडेन (1942] : यदि $\{p_n\}$ अनृण हो और P_n के साथ इसके nवें आंशिक योगफल के रूप में अवर्धमान हो तो $0 \le a < b \le \infty$, $0 \le t \le \pi$ तथा किसी n के लिए–

$$\left| \sum_{k=a}^{b} p_k e^{i(n-k)t} \right| \le A\, P_\tau$$

जहाँ $\tau = \left[\frac{1}{t}\right]$, $\frac{1}{t}$ का समाकल अंश तथा A एक परम अचर है।

प्रमेयिका 2 : यदि

$$N_n(t) = \frac{1}{2\pi R_n \sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \cos^k \frac{t}{2} \sin(k+1)\frac{t}{2}$$

तो

$$N_n(t) = \begin{cases} O(n), \text{ for } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ O\left(\frac{R_t}{t R_n}\right), \text{ for } \frac{1}{n} \le t \le \pi \end{cases}$$

प्रमेयिका 2 की उपपत्ति : $0 \le t \le \frac{1}{n}$ होने पर

$$\left| N_n(t) \right| = \left| \frac{1}{2\pi R_n \sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \cos^k \frac{t}{2} \sin(k+1)\frac{t}{2} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n t}\right) \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) p_{n+k} q_k t \right]$$

$$= O(n)$$

$\frac{1}{n} \le t \le \pi$ होने पर

$$\left| N_n^{(t)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi R_n \sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \cos^k \frac{t}{2} \sin(k+1)\frac{t}{2} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n t}\right) \left| I_m \sum_{k=0}^{n} p_{n+k} q_k e^{i(k+1)\frac{t}{2}} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n t}\right) \left| I_m \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} e^{i(n-k+1)\frac{t}{2}} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n t}\right) . O\left(R_\tau\right) \qquad \text{(प्रमेयिका 1 के अनुसार)}$$

$$= O\left(\frac{R_\tau}{t R_n}\right)$$

5. प्रमेय की उपपत्ति

बिन्दु $t = x$ पर $(-\pi, \pi)$ अन्तराल के फलन $f(t)$ की फूरियर श्रेणी (1.4) के nवें आंशिक योगफल $s_n(x)$ को

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2} t} \, dt \tag{5.1}$$

द्वारा दर्शाया जाता है[टिश्मार्श 1939, पृ. 403]

(1.1) के अनुसार s_n के $(E, 1)$ रूपान्तर E_n^1 को निम्नवत् दर्शाया जाता है–

$$E_n^1 - f(x) = \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin \frac{t}{2}} \left\{ I_m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos^n \frac{t}{2} \sin(n+1)\frac{t}{2} \, dt \tag{5.2}$$

अब (1.3) के अनुसार s_n के (N, p, q) (E, 1) रूपान्तर σ_n को निम्नवत् दर्शाया जाता है–

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi R_n} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \cos^k \frac{t}{2} \sin(k+1)\frac{t}{2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \phi(t) N_n(t) \, dt \tag{5.3}$$

$0 \le \frac{1}{n} \le \pi$ के लिए हम लिखेंगे

$$I = \sigma_n(x) - f(x) = \left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \right] \phi(t) N_n(t) \, dt$$

$$= I_1 + I_2 \text{, माना} \tag{5.4}$$

तब हमें प्राप्त होगा

$$||I|| = ||I_1 + I_2||$$

$$\leq ||I_1|| + ||I_2|| \tag{5.5}$$

अब यह दिखाने के लिए कि

$$||I|| = O\left(n^{-\alpha}\right) \tag{5.6}$$

हमें यह दिखलाना है कि

$$||I_1|| = O\left(n^{-\alpha}\right) \tag{5.7}$$

तथा

$$||I_2|| = O\left(n^{-\alpha}\right) \tag{5.8}$$

सर्वप्रथम I_1 पर विचार किया जावेगा। अब

$$||I_1|| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \phi(t) N_n(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)| N_n(t)\, dt$$

$$= O(n) \int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)|\, dt \text{, प्रमेयिका 2 का प्रयोग करने से}$$

$$= O(n) \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\alpha}\, dt \text{, (1.6) का प्रयोग करने से}$$

$$= O(n)\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= O\left(n^{-\alpha}\right)$$

इस तरह (5.7) सिद्ध हुआ।

अब हम I_2 पर विचार करेंगे। हमें प्राप्त है

$$||I_2|| = \left|\int_{1/n}^{\pi} \phi(t) N_n(t)\, dt\right|$$

$$\leq \int_{1/n}^{\pi} |\phi(t)|\, |N_n(t)|\, dt$$

$$= O\left(\frac{1}{R_n}\right) \int_{1/n}^{\pi} t^{\alpha} \frac{R_{\tau}}{t}\, dt$$ प्रमेयिका 2 तथा (1.6) का प्रयोग करने पर

$$= O(1) \int_{1/n}^{\pi} t^{\alpha-1}\, dt$$

$$= O(1)\left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right]_{1/n}^{\pi}$$

$$= O\left(n^{-\alpha}\right)$$

इससे (5.8) सिद्ध हुआ।

अब (5.7) तथा (5.8) से (5.6) का वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इससे हमारे प्रमेयों की उपपत्ति पूर्ण होती है।

कृतज्ञता–ज्ञापन

लेखकद्वय इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन तथा सहायता पहुँचाने हेतु बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी के गणित विभाग के अवकाशप्राप्त प्रोफेसर एल. एम. त्रिपाठी के प्रति आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. एलेक्जिट, जी. : Convergence problems of orthogonal series. Pergamon Press, London, 1961.
2. बार्वीन, डी. : J. L. M. S., 1958, 33, 352-357.
3. चन्द्रा, पी. : Nanta Math., 1975, 8, 88.
4. हार्डी, जी. एच. : Divergent series, Ist Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1949.
5. लाल, एस. तथा यादव, एस. एस. : Ganit Sandesh, 2000 14 (2), 63-66.
6. मकफैडेन, एल. : D. M. J. 1942, 9, 168-207.
7. कुरैशी, के. : Ind. J. pure Appl. Math; 1982, 13 (8), 898.
8. कुरैशी, के. तथा नेहा, एच. के. : Ganit, 1990, 41 (1), 37.
9. साहनी, बी. एन. तथा गोयल, डी. एस. : Ranchi University Math. J., 1973, 4, 50.
10. टिश्मार्श, ई. सी. : Theory of functions, IInd Edition, Oxford University Press, Oxford, 1939.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

एक फलन के सन्निकटन की मात्रा पर टिप्पणी

टीकम सिंह
121, महाश्वेता नगर, उज्जैन (म. प्र.)

[प्राप्त — सितम्बर 4, 2002]

सारांश

एक प्रमेय ऐसे फलन के सन्निकटन के लिए सिद्ध किया गया है, जिसका प्रथम अवकलन 'मोड्युलस ऑफ कन्टीन्युटी' के प्रतिबंध का पालन करता है। इस प्रमेय से एक अन्य प्रमेय लिपशिट्ज प्रतिबंध का पालन करने वाले फलनों के लिए भी प्राप्त किया गया है।

Abstract

A note on the degree of approximation to a function. *By* Tikam Singh, 121 Mahashweta Nagar, Ujjan (M.P.).

A theorem on the degree of approximation to a function whose derivative satisfies the modulus of continuity condition is established. Another theorem is also obtained satisfying the Lipschitz condition.

1. माना कि $\sum a_n$ एक अनंत श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। श्रेणी को (N, p_n, q_n) योग, s के संकलनीय कहते हैं यदि

$$N_n^{p,q}\left(\sum a_n\right) = \left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\, s_k \to s \tag{1}$$

जबकि $n \to \infty$ एवं

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \neq 0,\ P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k,\ Q_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \tag{2}$$

जब कि $N_n^{p,q}$ को सार्वीकृत नार्लुण्ड आपरेटर कहते हैं।

माना कि फलन $f \varepsilon L[0, 2\pi]$ की फूरिए श्रेणी

$$f \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \quad (3)$$

द्वारा प्रदर्शित की गयी है।

हम निम्नांकित चिन्हों का प्रयोग करेंगे।

$$\varphi(t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x) \quad (4)$$

$$N_n^{p,q}(x) = N_n^{p,q}(f; x) = \left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k s_{n-k}(f; x) \quad (5)$$

$$\Delta p_k = p_k - p_{k\ 1}; \ p_{-1} = 0 \quad (6)$$

माना कि C^1 उन फलनों का समूह है जो एक बार अवकलनीय हैं। सिंह[2] का निम्नलिखित प्रमेय ध्यान देने योग्य है।

प्रमेय — मान कि $\omega(t)$ एक आवर्ती फलन का सांतत्य मोडुलस इस प्रकार का है कि $\omega(t) = O(t^{\alpha})$, $0 < \alpha \le 1$ एवं $\{p_n\}$ एक ऐसा अनुक्रम है कि

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta p_{n-k}\right| = O\left(p_n\right) \quad (7)$$

तब

$$\max_{0 \le x \le 2\pi}\left|f(x) - N_n(f; x)\right| = \begin{cases} O\left[\left(p_n / P_n\right)^{\alpha}\right], & 0 < \alpha < 1, \\ O\left[\left(p_n / P_n\right)\log\left(p_n / P_n\right)\right], & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8)$$

जहाँ $N_n(f; x)$ नार्लुण्ड आपरेटर है।

2. प्रस्तुत टिप्पणी में हम उपर्युक्त प्रमेय के विस्तार पर विचार करते हैं। ऐसे सान्तत्य फलनों के सन्निकटन का विचार आता है जिनका प्रथम अवकलन सान्तत्य मोडुलस के प्रतिबन्ध का पालन करता है। इस प्रमेय के प्रतिपादन में हम सार्वीकृत नार्लुण्ड आपरेटर का प्रयोग करते हैं। हम सिद्ध करेंगे—

प्रमेय — माना कि w (t) एक $f \in C^1[0, 2\pi]$ का सान्तत्य मोडुलस इस प्रकार है कि

$$\int_t^{\delta} \left[\omega(t)/t^2 \right] dt = O(H(t)),\ H(t) > 0, \tag{9}$$

तब अनुक्रम $\{p_n\}$ एवं $\{q_n\}$ के लिए हम

$$\max_{0 \le x \le 2\pi} \left| f - N_n^{p,q}(f;\, x) \right| = O\left[\left(1/R_n \right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k \right) H(1/(k+1)) \right]$$

प्राप्त करते हैं (10)

उपपत्ति — जिगमुण्ड[1] की सहायता से

$$N_n^{p,q}(x) - f(x) = \left(1/2\pi R_n \right) \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \sin(k + 1/2)\, t\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \varphi(t)\ K_n(t)\ dt = I,\ (\text{मान लिया}), \tag{11}$$

जहाँ कि

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi R_n \sin t/2} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \sin(k + 1/2)\, t$$

$$= \frac{1}{2\pi R_n} \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k \right) \frac{\sin^2((k+1)/2)\, t}{\sin^2(t/2)}$$

आबेल के उपप्रमेय से तथा सरल करने के उपरान्त।

माना कि

$$F_n(t) = \left(2/\pi R_n \right) \int_t^{\pi} \left(1/u^2 \right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k \right) \sin^2((k+1)/2)\, t\, dt$$

अब

$$I = \int_0^{\pi} \varphi(t)\ K_n(t)\ dt$$

$$= \Big[\varphi(t)\ F_n(t) \Big]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(t)\ F_n(t)\ dt$$

$$= - \int_0^\pi \varphi'(t)\ F_n(t)\ dt \qquad (12)$$

पुनश्च

$$F_n(t) = \left(2/\pi R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\ q_k\right) \int_t^\pi \frac{\sin^2((k+1)/2)\,u}{u^2}\ du$$

$$= \left(2/\pi R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\ q_k\right) (k+1) \int_{(k+1)t}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 v}{v^2}\ dv$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\ q_k\right) (k+1)^2\, t\right],\quad (k+1)\,t < 1$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k} q_k\right) (k+1)\,(1/(k+1)^2\, t^2)\,(k+1)\,t\right], (k+1)\,t \geq 1$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\ q_k\right) \frac{1}{t}\right] \qquad (13)$$

शोधपत्र[3] के प्रमेय 2 की उपपत्ति की विवेचना को दृष्टिगत रखते हुए

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |I| = O\left[\left(1/R_n\right) \sum_{k=0}^{n} \left(p_{n-k}\, q_k - p_{n-k-1}\ q_{k+1}\right)\right]$$

$$\times \left[\int_0^{1/k+1} \varphi'(t)\ (k+1)^2\, t\, dt + \int_{1/k+1}^{\pi} |\, \varphi'(t)\ (1/t)\, dt\right]$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right)\right]\left[(k+1)^2 \int_0^{1/k+1} t\,\omega(t)\,dt + \int_{1/k+1}^{\pi} (\omega(t)/t)\,dt\right]$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right)\right]\left[\int_0^{1/k+1} \{\omega(t)/t\}\,dt + \int_{1/k+1}^{\pi} \{\omega(t)/t^2\}\,dt\right]$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right)\right]\left[(k+1)^{-1} H\left((k+1)^{-1}\right) + H\left((k+1)^{-1}\right)\right]$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right) H\left((k+1)^{-1}\right)\right] \qquad (14)$$

इससे प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

3. यदि हम

$$H(t) = t^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

$$= \log(\pi/t),\ \alpha = 1$$

उपर्युक्त प्रमेय में रखें, तब हम निम्नांकित प्रतिफल प्राप्त करते हैं—

प्रमेय 2 — माना कि $f \varepsilon\, Lip\, \alpha,\ 0 < \alpha < 1,$, अनुक्रम $\{p_n\}$ एवम् $\{q_n\}$ के लिए

$$\max_{0 \le x \le 2\pi} \left| f - N_n^{p,q} \right| = O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right)}{(k+1)^{\alpha}}\right],\ 0 < \alpha < 1$$

$$= O\left[\left(1/R_n\right)\sum_{k=0}^{n} \Delta\left(p_{n-k}\, q_k\right) \log(k+1)\right],\ \alpha = 1. \qquad (15)$$

निर्देश

1. सिंह टीकम : The Mathematics Student, 1991, 58, 219-227.

2. सिंह, टीकम : Indian Journal of Mathematics, 1980, 22, 173-176.

3. सिंह, टीकम : Maths. Vesnik, 1991, 43, 111-118.

4. जिगमुण्ड, ए., : Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

कृषि भूमि गुणवत्ता निर्धारण एवं सुदूर संवेदन तकनीक : मिरजापुर जनपद का एक प्रतीक अध्ययन

संजय कुमार त्रिपाठी एवं दिनेश कुमार त्रिपाठी
भूगोल विभाग, कमला नेहरु भौतिक एवं सामाजिक विज्ञान संस्थान, सुलतानपुर (उ. प्र.)

[प्राप्त — सितम्बर 5, 2002]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का मुख्य उद्देश्य कृषि भूमि गुणवत्ता के विभिन्न क्षेत्रों (ALQZ) की पहचान एवं इसकी क्षेत्रीय विषमता का मिरजापुर जनपद (24° 34′ से 25° 16′ उ० एवं 82° 05′ से 83° 11′ पू) के विशेष सन्दर्भ में विश्लेषण करना है। अध्ययन क्षेत्र में ALQ की स्थानिक विषमता का अध्ययन करने हेतु ALQZ के निर्धारण एवं मानचित्रण में अतिआधुनिक तकनीकों-सुदूर संवेदन एवं भौगोलिक सूचना तन्त्र (GLS) का प्रयोग किया गया। ALQZ के निर्धारण हेतु भौतिक एवं सांस्कृतिक कारकों का विश्लेषण किया गया। कृषि भूमि गुणवत्ता क्षेत्रों की पहचान एवं कोटि निर्धारण इस प्रकार किया गया है— i. सर्वोत्तम ii. अति उत्तम iii. उत्तम iv. मध्यम v. निम्न एवं vi. अति निम्न कृषि भूमि गुणवत्ता।

Abstract

Agricultural land quality determination and remote sensing technique : A case study of Mirzapur district. *By* S. K. Tripathi and D. K. Tripathi, P. G. Department of Geography, Kamla Nehru Institute of Physical and Social Sciences, Sultanpur (U.P.).

The main objective of this paper is to identify different agricutural land quality zones (ALQZ) and to analyse its spatial variation taking a case study of Mirzapur District (24° 34′ N to 25° 16′ N and 82° 05′ E to 83° 11′ E). The modern techniques of remote sensing and GIS (Geographical Information System) have been applied to delineate and map out the various zones of ALQ to study the spatial variation in the study area. In order to find out the ALQ zones, both physical and cultural

factors have been analysed. These zones are identified and categoriesed as : i. extremely good ii. very good iii. good iv. moderate v. poor vi. very poor agricultural land quality.

कृषि भूमि गुणवत्ता (ALQ) विभिन्न भौतिक-सांस्कृतिक तथा सामाजिक-आर्थिक कारकों का परिणाम होती है, जो भूमि की भरण पोषण क्षमता (Carrying Capacity) का निर्धारण करती है। देश में कृषि भूमि पर बढ़ते जनसंख्या के दबाव की समस्या से निपटना कृषि-वैज्ञानिकों, नियोजकों एवं भूगोलवेत्ताओं के लिए एक चुनौती है। भारतीय कृषि नियोजकों द्वारा स्थानिक उपागगमों (Spatial Approaches) को अनदेखा किये जाने के कारण कृषि विकास के व्यापक लक्ष्य अभी तक प्राप्त नहीं किये जा सके हैं।[8] इस सन्दर्भ में कृषि भूमिगुणवत्ता निर्धारण एवं मानचित्रण एक महत्त्वपूर्ण उपादान सिद्ध हो सकता है। परम्परागत विधियों से भूमि उपयोग सर्वेक्षण एवं कृषि गुणवत्ता के निर्धारण का प्रयास विभिन्न विद्वानों द्वारा किया गया है।[2, 3, 7, 11, 12, 17, 18, 20, 21, 22] अद्यतन स्थानिक शोधों (Spatial Researches) में सुदूर संवेदन (Remote Sensint) एवं GIS तकनीक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा कर रही है। इस विधा द्वारा किसी भी क्षेत्र के धरातलीय तत्त्वों जैसे संरचना, उच्चावच, भूआकारिकी (Geomorphology), मृदा, वनस्पति, जल, खनिज, शस्य उत्पादन, भूमि उपयोग/आच्छादन आदि की सूचनाओं और आंकड़ों का एकत्रीकरण, विश्लेषण एवं मानचित्रण हेतु प्रभावी ढंग से प्रयोग किया जा सकता है। सुदूर संवेदन तकनीक किसी भी क्षेत्र का समग्र एवं समन्वित छविचित्र (Image) प्रस्तुत करती है। इस प्रविधि का प्रयोग भूमि सर्वेक्षण हेतु विभिन्न संस्थाओं (नेशनल रिमोट सेसिंग एजेन्सी (NRSA), सर्वे ऑफ इण्डिया, रीजनल रिमोट सेसिंग सर्विस सेन्टर्स, स्टेट सेसिंग एप्लीकेशन सेन्टर्स, नेशनल एटलस एण्ड थिमेटिक मैपिंग आर्गनाइजेशन, नेशनल ब्यूरो ऑफ सॉयल एण्ड लैण्ड यूज सर्वे, सेन्ट्रल एरिड जोन रिसर्च इंस्टीट्यूट) एवं विद्वानों[1, 2, 4, 5, 6, 9, 13, 14, 16] द्वारा किया गया है।

प्रस्तुत शोध पत्र मिरजापुर जनपद (24° 34′ से 25° 16′ उ. एवं 82° 05′ से 83° 11′ पू.) को एक प्रतीक अध्ययन के रूप में कृषि भूमि गुणवत्ता के निर्धारण एवं विश्लेषण हेतु चयनित किया गया है (मानचित्र सं. 1)। मिरजापुर जनपद (क्षेत्रफल-494 वर्ग किमी.) अपनी विषमतायुक्त भौगोलिक स्वरूप के कारण एक चुनौतीपूर्ण एवं आकर्षक अध्ययनक्षेत्र प्रस्तुत करता है। यह जनपद दो विशिष्ट भौतिक विभागों (Physiographic Divisions) — मध्य गंगा का मैदान एवं विन्ध्याचल-बघेलखण्ड पठार का एक संगम क्षेत्र है। यह रूढ़ भ्वाकृतिक विशिष्टता, निर्बाध बाढ़, अकालग्रस्तता एवं आर्थिक रूप से पिछड़े क्षेत्र के रूप में पहचाना जाता है। प्रस्तुत शोधपत्र का प्रमुख लक्ष्य कृषि भूमि गुणवत्ता क्षेत्रों का निर्धारण, मानचित्रण एवं तत्सम्बन्धी विषमता का आकलन तथा विश्लेषण करना है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत शोध पत्र में निम्नलिखित स्थानिक (Spatial) एवं अस्थानिक (Non-Spatial) आंकड़ों का प्रयोग किया गया है—

MIRZAPUR DISTRICT

LOCATION MAP

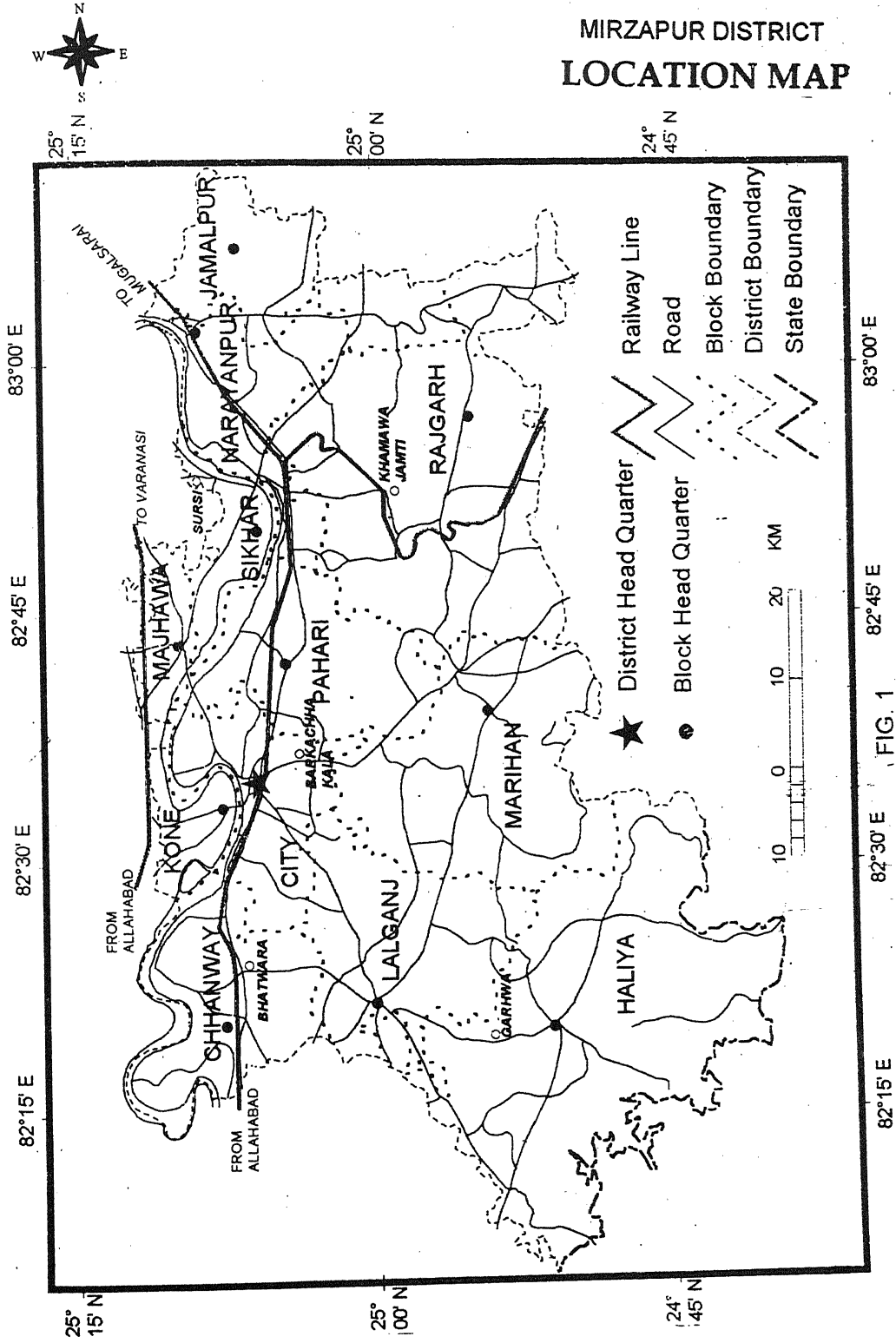



FIG. 1

i. IRS-1B, LISS-1, FCC (B-2, 3 एवं 4) मापक 1:250000।

ii. सर्वे ऑफ इण्डिया द्वारा प्रकाशित स्थालाकृति मानचित्र (Topo sheet) — संख्या 63 - K, L, O एवं P, मापक 1:250000।

iii. नेशनल एटलस एण्ड थिमेटिक आर्गनाइजेशन (NATMO), कोलकाता द्वारा प्रकाशित जनपद नियोजन मानचित्र (District Planning Map), मिरजापुर जनपद (मापक 1:250000)।

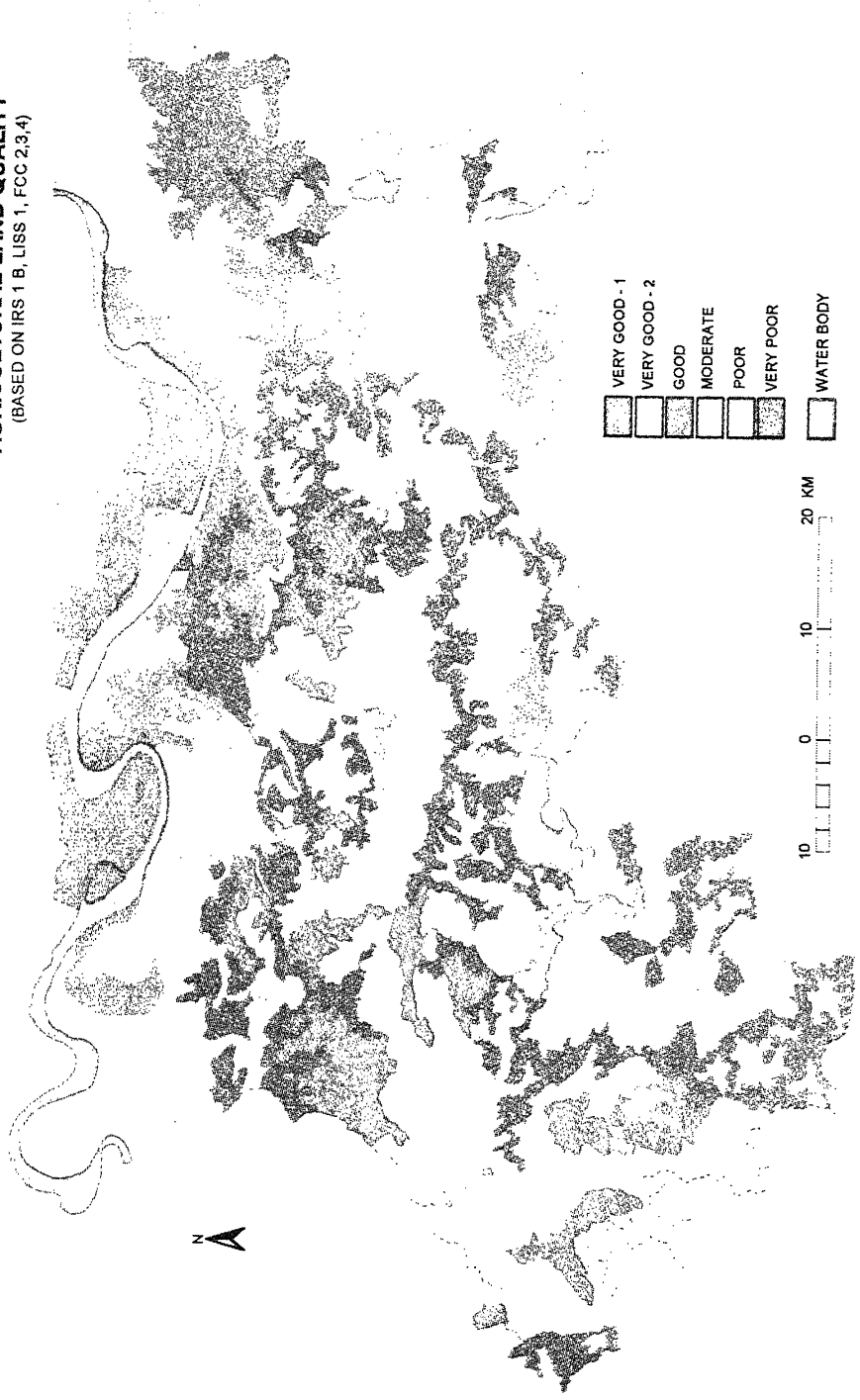
iv. भौम जन सर्वेक्षण विभाग, उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा एकत्रित भौम जल सम्बन्धी आंकड़े।

v. सांख्यिकीय पत्रिका, मिरजापुर जनपद-1997।

कृषि भूमि गुणवत्ता निर्धारण हेतु विभिन्न उपयुक्त एवं उपलब्ध सूचक तत्वों का चयन किया गया। यथा— भ्वाकृतिक भूदृश्य (Geomorphic Landscape), ढाल प्रवणता (Slope Gradient), अपवाह तंत्र, मृदा संगठन, भूमि उपयोग/आच्छादन, प्राकृतिक वनस्पति, भौमजल दशाएं एवं कृषि उत्पादकता। उपर्युक्त सूचक तत्वों से सम्बन्धित उपलब्ध स्थानिक (Spatial) एवं अस्थानिक (Non-Spatial) आंकड़ों के आधार पर चित्र IRS-1B, LISS-1, FCC (B-2,3 एवं 4) का दृश्य निर्वचन (Visual Interpretation) किया गया है। उक्त छवि चित्र का दृश्य निर्वचन तीन तत्वों पर आधारित है— 1. छवि चित्र के तत्व (Photo Elements)— आभा, गठन, आकार, स्वरूप, स्थिति आदि 2. भू तकनीक तत्व (Geo-Technical Elements)— भ्वाकृतिक भूदृश्य, ढाल प्रणवता, अपवाह तंत्र, मृदा संगठन, भूमि उपयोग/आच्छादन, प्राकृतिक वनस्पति, भौमजल दशाएं इत्यादि एवं 3. साक्ष्य अभिसारण (Convergence of Evidence)। तत्पश्चात् साक्ष्य अभिसारण द्वारा प्राप्त सूचनाओं का अध्ययन क्षेत्र के 70 चयनित स्थानों के क्षेत्रीय सत्यापन (Field Verification) करने के बाद ALQ क्षेत्रों के निर्धारण को अन्तिम रूप दिया गया है। इन ALQ क्षेत्रों का स्थानिक विश्लेषण GIS (भौगोलिक सूचना तंत्र) प्रविधि के ARC-VIEW एवं MAP-INFO साफ्टवेयरों के प्रयोग द्वारा किया गया है। जनपद के कुल 12 विकास खण्डों को अध्ययन की लघुतम इकाई के रूप में चयनित किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

मिरजापुर जनपद में छः ALQ क्षेत्रों का निर्धारण किया गया है— i. सर्वोत्तम (V1) ii. अति उत्तम (V2) iii. उत्तम (G) ic. मध्यम (M) v. निम्न (L) एवं vi. अति निम्न (VL) (सारणी सं.-1)। सर्वोत्तम तथा अति उत्तम ALQ क्षेत्र गहन कृषि तथा अति उत्तम कृषि दक्षता प्रदर्शित करता है। इन क्षेत्रों की पहचान एवं निर्धारण उपग्रह छवि-चित्र में अति गहरे लाल आभा एवं समान गठन वाले चकत्तों (Patches) के रूप में की जा सकती है। सर्वाधिक विस्तृत सर्वोत्तम ALQ क्षेत्र कोन विकास खण्ड (100%) में प्राप्य है, जबकि अति उत्तम ALQ का अधिकतम विस्तार मझवा (67.57%) में अंकित किया गया है। उत्तम गुणवत्ता वाली कृषि भूमि की पहचान हल्के लाल आभा एवं बारीक

MIRZAPUR DISTRICT
AGRICULTURAL LAND QUALITY
(BASED ON IRS 1 B, LISS 1, FCC 2,3,4)
N
VERY GOOD - 1
VERY GOOD - 2
GOOD
MODERATE
POOR
VERY POOR
WATER BODY
10
0
10
20 KM

सारणी 1

मिर्जापुर जनपद में कृषि भूमिगुणवत्ता की स्थानिक विषमता
(IRS-IB-LISS 1FCC B-2, 3, एवं 4 पर आधारित)

कृषि भूमि गुणवत्ता	छवि चित्र विशिष्टता	भूमि उपयोग/आच्छादन	भ्वाकृतिक भूदृश्य	भौम जल दशाएं	कृषि उत्पादकता कोटि	आच्छादित क्षेत्र (% में)
V1 सर्वोत्तम	स्पष्टतः लाल	अति उत्तम कृषित भूमि	नवीन जलोढ़ मैदान	बहुत अच्छी	उच्च	11.49
V2 अति उत्तम	मिश्रित लाल	उत्तम कृषि भूमि	पुराना जलोढ़ मैदान.	अच्छी	उच्च	16.98
G उत्तम	प्रगाढ़ लाल (धूसर मिश्रित)	उत्तम से मध्यम कृषित भूमि	पेडीमेंट	सामान्य	मध्यम-उच्च	8.52
M मध्यम	मिश्रित से हल्की धूसर	वृक्षारोपण युक्त एवं विरल कृषि	पेडीमेंट	सामान्य से निम्न	मध्यम-निम्न	30.98
L निम्न	श्वेत मिश्रित हल्की धूसर	झाड़ी एवं विवृत धरातल	चट्टानी धरातल, पेडीमेंट	निम्न	निम्न	13.51
VL अति निम्न	हल्की धूसर से श्वेत	विवृत धरातल	पूर्ण चट्टानी पठार	अति निम्न	निम्न	18.53

से मध्यम गठन के चकत्तों से की गयी है। इस कोटि की कृषि भूमि अधिकतम लालगंज (27.58%) में पायी जाती है। मध्यम ALQ क्षेत्रों को धूसर से लाल मिश्रित आभा (विभिन्न चरों के मिश्रित आभा के कारण) तथा मध्यम से स्थूल गठन द्वारा पहचाना जा सकता है। इस कोटि की भूमि का अधिकतम क्षेत्र हलिया विकास खण्ड (52.37%) में पाया जाता है। निम्न ALQ का अधिकतम क्षेत्र राजगढ़ (34.86%) में जबकि अति निम्न ALQ मड़िहान (29.21%) में पाया जाता है (सारणी 2 एवं मानचित्र संख्या 2)। निम्न एवं अति निम्न ALQ क्षेत्रों की पहचान छवि चित्र पर क्रमशः श्वेत मिश्रित हल्का धूसर तथा हल्के धूसर मिश्रित श्वेत से पूर्णतः श्वेत आभा द्वारा किया जा सकता है।

सारणी 2

मिर्जापुर जनपद में कृषि भूमिगुणवत्ता की स्थानिक विषमता

(IRS-IB-LISS1 FCCB-2, 3, 4 के GIS विश्लेषण पर आधारित)

विकास खणड	भूमि गुणवत्ता कोटि (प्रतिशत में)					
	सर्वोत्तम	अति उच्च	उच्च	मध्यम	निम्न	अति निम्न
1. छानवे	11.43	64.73	0.80	6.63	1.15	12.27
2. कोन	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3. मझवा	32.43	67.57	0.00	0.00	0.00	0.00
4. सिटी	19.93	24.59	4.33	35.40	4.42	11.32
5. पहाड़ी	4.63	7.79	24.72	24.42	12.41	26.04
6. लालगंज	0.00	11.79	27.58	31.38	5.66	23.59
7. हलिया	0.00	8.74	11.07	52.37	6.46	21.37
8. मरिहान	2.70	0.00	1.03	43.71	23.35	29.21
9. राजगढ़	2.12	3.65	5.50	31.67	34.86	22.20
10. सिखर	89.17	10.83	0.00	0.00	0.00	0.00
11. नरायनपुर	27.93	53.39	7.16	0.00	5.74	5.78
12. जमामपुर	31.43	39.98	0.00	9.18	6.92	2.49
योग	11.49	16.98	8.52	30.98	13.51	18.53

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक इस प्रपत्र की तैयारी में डॉ० शिवपूजन मिश्र (रीडर, भूगोल विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय) से प्राप्त निर्देशन एवं अवसंरचनात्मक सहयोग के लिए आभारी है।

निर्देश

1. करेल, आर. एल. तथा अन्य : Natural resources Management : A new perespective, NNRMS, Bangalore, 1992.

2. कम्बरलैन्ड, के. बी. : Transactions of Royal Society of Geographers of New Zealand, 1944, 74, 185-195.

3. कोलमैन, ए. एम. : Geographical Magazine, 1960, 33, 347.

4. गौतम, एन. सी. : Importance of waste land mapping in the national perspective, in S. C. Sharma et. al., Utilisations of Waste Lands for Sustainable Development in India, Correct Pub. Co., New Delhi, 1990, 81-95.

5. गौतम, एन. सी. तथा अन्य : Space Technology and Geography, NRSA Pub., Hyderabad, 1994.

6. घोष, एस. : J. Indian Soc. of Remote Sensing, 1996, 24 (3), 193-202.

7. जक्स, जी. बी. : Land classification for land-use planning, Imperial Bureau of Soil Science, Harpenden (United Kingdom), 1946, 68.

8. त्रिपाठी, डी. के. : Agricultural Development and Planning in Faizabad District, अप्रकाशित शोध प्रबन्ध, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी, 1999, 1.

9. त्रिपाठी, एस. के. : Geographical Study on Agricultural Development, Problems and Prospects in Mirzapur Distrist, अप्रकाशित शोध प्रबन्ध, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी, 2001.

10. पाउल, सी. के. : Span, 1980, 5-8.

11. फिन्च, वी. सी. : Geographic surveying and montfort : A study in landscape types of south western Wisconsin, Geographical Society of Chicago, Chicago University of Chicago Press, 1933, 9. 640.

12. भाटिया, एस. एस. : Geographic Polonica, 1970, 19, 227.

13. मिश्रा, एस. पी. तथा चौबे, एस. के. : Geomorphic features and and their relation with agricultural land quality : A case study of chahanion Block, Chandauli District, U.P., Transaction, 1999, 21, 2, 23-34.

14. राघवस्वामी, वी. : Role of Satellite remote sensing of Land System Mapping : Land resources Inventory and Land Use Planning, Photonirvachak, ISRS, Dehradun, 1982, 10 (3).

15. शर्मा, वी. के. : Remote Sensing for Land Resource Planning, Concept Publication Co., New Delhi, 1991.

16. सक्सेना, के. जी. तथा अन्य : Remote Sensing for management of Biological Resources : A National Outlook for the Himalyas, in P. N. Gutpa and A. K. Roy Land, Mountain Resources Management and remote Sensing, Suya Pub. Dehradun, 1991.

17. सिंह, जे. : An Agricultural Atlas of India, Vishal Pub Kurukshetra, 1974.

18. सिंह, जे. : An Agricultural Geography of Haryana, Vishal Pub. Kurukshetra, 1976.

19. स्टाम्प, एल. डी. : The Land of Britain and How it is Used, Published for the British Council, London, 1946.

20. स्टाम्प, एल. डी. : The Land of Britain : Its use and misuse, London, 1948.

21. स्टाम्प, एल. डी. : Geographical Review, 1958, 48 (1), 3.

22. हिगिंस, जी. एस. : Soil Bulletin 1977, 33, 59.

23. हन्ट, ए. जे. : Geography, 1953, 38, 284-285.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

वन्य प्राणी बचाव कार्य-2

सतीश कुमार शर्मा
फुलवाड़ी वन्यजीव अभयारण्य, कोटड़ा—307025, जिला उदयपुर (राज.)

[प्राप्त — सितम्बर 1, 2002]

सारांश

इस लेख के प्रथम भाग में तेंदुओं के बचाव का विवरण प्रस्तुत किया था। इस पत्र में अन्य वन्य प्राणियों के बचाव के प्रकरणों का ब्यौरा प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

Wild animal rescue operation. Part II. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Phulware World Life Sanctuary, Kotra. Dist Udapur (Raj.).

This is a continuation of the last paper which appeared in July 2002 issue (Vol. 45, no 3) of this Journal. It deals with operations related with rescue of wild animals other than Panher (Panthera pardus).

नीलगाय (Nilgai-Boselaphus tragocamelus) बचाव प्रकरण :

जयपुर जिले में चोमू गाँव में एक नर नीलगाय कुएँ में गिर गया। पानी वाले कुएँ में प्राणी तैर कर जैसे-तैसे अपने को बचाता रहा। जयपुर चिड़ियाघर स्टाफ ने मौके पर बचाव कार्य प्रारंभ किया। कुएँ में क्षैतिज लगे लोहे के गर्डर से पानी निकालने की एक विद्युत मोटर लटक रही थी तथा आने-जाने हेतु लोहे की सीढ़ी भी लगी हुई थी। विद्युत करंट का जोखिम न रहे अतः मेन स्विच बन्द कर दिया गया। मोटे रस्से का एक सरकने वाला फन्दा बना कर सीढ़ी के सहारे एक व्यक्ति कुएँ में उतरा तथा फन्दा नीलगाय के सींगों में फेंक, रस्से को खींच सींगों को बाँध दिया। तुरन्त रस्से को गर्डर से इतना खींच कर बांध दिया ताकि बेहोशी का इन्जेक्शन लगाने पर बेहोशी आने पर प्राणी की गर्दन पानी के बाहर रहे। प्राणी को बेहोशी का इन्जेक्शन सीढ़ियों पर खड़े

होकर नजदीक से डार्ट कर दिया गया। प्राणी के बेहोश होने पर छाती व कमर के नीचे दो मजबूत लकड़ियाँ लगा छोरों को रस्से से बांध कर ट्रैक्टर की मदद से प्राणी को सकुशल बाहर खींच लिया गया।

यहाँ सींगों में रस्सा बांध कर गर्दन को निरन्तर तान कर रखना जरूरी था अन्यथा बेहोशी में प्राणी पानी में जैसे ही डूबता, नासा-छिद्रों से होकर पानी उसके फेफड़ों में घुस जाता और प्राणी को बचाना मुश्किल हो जाता।

चौसिंगा (Four-horned Antelope-Tetracerus quadricornis) बचाव प्रकरण :

कुंभलगढ़ अभयारण्य (जिला उदयपुर, राजसमंद, पाली) में दो चौसिंगे एक छोटे, कम गहरे कुएँ में गिर गये। अभयारण्य स्टाफ ने कुएँ में लकड़ियाँ, पत्ते आदि डाल-डाल कर कुएँ की गहराई को और कम कर दिया। कुछ देर बाद दोनों चौसिंगे उछल-उछल कर बाहर निकल कर जंगल में भाग गये।

साँभर (Sambar-Cervus unicolor) बचाव प्रकरण :

जयपुर शहर में चोमू रोड पर एक फैक्ट्री में नाहरगढ़ वन्यजीव अभयारण्य से भटक कर आया एक साँभर घुस गया। जयपुर चिड़ियाघर स्टाफ ने मौके पर पहुँच कर बेहोशी का इन्जेक्शन डार्ट कर प्राणी को बेहोश किया। एक ट्रैक्टर की ट्राली में रख, प्राणी को नाहरगढ़ अभयारण्य में ले जाकर मुक्त कर दिया गया।

पैंगोलिन (Indian Pangolin-Manis crassicaudata) बचाव प्रकरण :

सिरोही जिले में एक सीमेंट फैक्ट्री परिसर में एक बड़ा पैंगोलिन देखा गया। फैक्ट्री स्टाफ में भय फैल गया। वन विभाग को सूचना मिलते ही बचाव दल मौके पर पहुँच कर प्राणी को एक टाट की बोरी में बन्द कर उसे जयपुर चिड़ियाघर पहुँचा दिया। इस प्राणी को बेहोश करने की आवश्यकता नहीं होती। यह डरावना जरूर लगता है परन्तु इसके मुँह में दाँत नहीं होते, न ही यह काटता है। छेड़ने पर निश्चल होकर कुण्डली बना कर लेट जाता है। चूँकि पैंगोलिन मुख्यतः दीमक व चीटियाँ खाता है अतः चिड़ियाघर में यह विशिष्ट भोजन निरंतर उपलब्ध कराना कठिन कार्य होता है अतः ऐसे प्राणियों को यदि वे पूर्ण स्वस्थ हैं तो सीधे ही और यदि घायल हैं तो उपचार के तुरन्त बाद उनके प्राकृतिक आवास में मुक्त कर देना ही उत्तम रहता है। यहाँ पकड़े गये प्राणी को कुछ दिन उपचार कर उपयुक्त आवास में सीतामाता अभयारण्य में मुक्त कर दिया गया। चूँकि सीतामाता अभयारण्य में पैंगोलिन उपस्थित हैं अतः इस प्राणी के जीवित रहने की परिस्थितियाँ विद्यमान होने का यह पुख्ता सबूत था अतः पकड़े गये पैंगोलिन को यहाँ छोड़ा गया। हमें किसी प्राणी को आँख बन्द कर कहीं भी छोड़ने की जोखिम नहीं उठानी चाहिये बल्कि उस आवास का पूर्ण अध्ययन जरूरी है जहाँ प्राणी को मुक्त किया जाना प्रस्तावित है।

पैंगोलिन, सिवेट आदि छोटे प्राणियों को टाट की बोरी में बन्द कर ले जाया जा सकता है।

बोरी सीमेन्ट या किसी रासायनिक पदार्थ को भरने में प्रयोग नहीं होनी चाहिये अन्यथा प्राणी रास्ते में मर सकता है। प्राणियों को प्लास्टिक के बोरे व धातु के कन्टेनरों में परिवहन कदापि नहीं करना चाहिये। प्लास्टिक बोरों एवं धातु कन्टेनरों में हवा का संचार नहीं होता अतः प्राणियों का दम घुट ज़ाता है। साथ ही इनमें अन्दर तापमान की उपयुक्त स्थितियाँ भी नहीं मिलतीं।

बिज्जू/लकटी (Common Palm Civet-Paradoxurus hermaphroditus) बचाव प्रकरण :

(i) उदयपुर जिले के झाड़ोल (फलासिया) गाँव में रात्रि में एक बन्द दुकान में एक लोहे के बेलनाकार ऊँचे ड्रम में रखे गुड़ को खाने के लिये एक बिज्जू ड्रम में उतर गया। पेट भरने के बाद उसने निकलने के काफी प्रयास किये, लेकिन वह बाहर नहीं निकल सका। सुबह दुकान खोलने पर मालिक को ड्रम में किसी के होने का आभास होने पर, झाँक कर देखा तो एक बिज्जू को अन्दर पाय। उसने डर कर तुरन्त दुकान बन्द की एवं झाड़ोल रेन्ज को सूचना दी। वनकर्मियों ने मौके पर जाकर ड्रम को ऊँटगाड़ी पर लाद कर सुरक्षित वनक्षेत्र में जाकर ड्रम को टेढ़ा करके उसके पेंदे को थपथपाया। जानवर बाहर आ गया एवं जंगल में चला गया।

बिज्जू रात्रिचर प्राणी है तथा मीठा खाने का शौकीन होता है तथा यह आबादी क्षेत्रों में नालियों व अन्य छेदों में छिप कर दिन में सोता रहता है एवं रात को भोजन की तलाश में बाहर निकलता है। मीठा खाने के लिये यह पानी निकासी के नालों, खुली खिड़कियों, टूटे दरवाजों या ऐसे ही अन्य प्रवेश द्वारों से परचूनी, हलवाइयों, शहद बिक्री की दुकानों, घरों आदि में घुस जाता है। इस प्राणी को टाट के बोरे में भी बन्द कर सुरक्षित स्थान पर छोड़ा जा सकता है।

(ii) माउन्ट आबू में एक घर में बिज्जू घुस गया। सूचना मिलने पर वनकर्मियों ने घर में घुस कर टाट से दबोच उसकी पूँछ पकड़ कर उसे लटकती अवस्था में ऊपर उठा लिया। उसके सिर के नीचे एक टाट का बोरा लाकर उसे उसमें डाल कर सुरक्षित दूर वन क्षेत्र में छोड़ दिया।

(iii) राजसमंद जिले में केलवाड़ा गाँव में एक बिज्जू एक घर के पिछवाड़े में पानी निकासी की चौड़ी नाली में दिन में छिप कर सोता था। घर वालों ने एक दिन उसे देख लिया। घबरा कर परिवारजन घर से बाहर निकल आये एवं कुंभलगढ़ अभयारण्य के स्टाफ को सूचना दी। स्टाफ ने मौके पर पहुँच कर लम्बे रबर पाइप की मदद से पानी की पतली तेज धार नाली में डाली। बिज्जू घबरा कर बाहर निकल कर भाग गया।

बिज्जू एक शान्तिप्रिय डरपोक प्राणी है जो आदमी पर आक्रमण नहीं करता है। यह जहाँ एक बार अड्डा जमा लेता है वहँ उसका परिवार प्रतिदिन सूर्योदय से पहले पहुँच कर दिन भर सोता रहता है एवं सूर्यास्त के बाद भोजन की तलाशी में बाहर निकलता है। यदि घर के किसी उपेक्षित सुनसान भाग में इस प्राणी की आवा-जाही हो तो भी उसे नज़रअन्दाज किया जा सकता है।

जरख (Striped Hyena-Hyaena hyaena) बचाव प्रकरण :

(i) जालौर जिले में सुन्दामाता नामक स्थान पर एक जरख सूखे कुएँ में गिर गया। माउन्ट आबू

स्टाफ एवं गुजरात माउन्टेनियरिंग संस्था के लोग बचाव हेतु पहुँचे। गीली मिट्टी के छोटे गोले बना कर जरख पर फेंक कर उसे गतिमान किया गया तथा रस्से का एक फन्दा अगले पैर में एवं एक पिछले (तिर्यक रेखा की दिशा में) पैर में डाला गया। जरख ने रस्सों को काटने का भरपूर प्रयास किया। उसे शीघ्र बाहर खींचा गया ताकि रस्से न काट सके। जरख स्वस्थ था अतः वनक्षेत्र में मुक्त कर दिया गया।

(ii) मांडलगढ़ में एक सूखे कुएँ में एक जरख गिर गया। वन विभाग के बचाव स्टॉफ ने मौके पर पहुँच कर मोटे रस्से से सरकने वाला फन्दा बना कर लम्बे-लम्बे बाँसों की मदद से उसके गले व एक अगले पैर में ''जनेऊ'' की तरह डाल दिय। जरख ने मजबूत जबड़ों से रस्सा काटना प्रारंभ किया। उसे शीघ्र बाहर खींचा गया। अन्दर आते समय रास्ते में भी वह रस्सा काटता रहा। बाहर आते-आते उसने रस्सा काट दिया तथा ''जनेऊ'' पहने जंगल में भाग गया।

(iii) भीम जी का गुड़ा (केलवाड़ा) में सूखे कूएँ में एक जरख गिर गय। कुंभलगढ़ अभयारण्य का स्टाफ बचाव हेतु पहुँचा। मांडलगढ़ वाली विधि से जरख को बाहर निकाला गया। यहाँ भी रस्सा काट, रस्से के फन्दे की 'जनेऊ' पहने जरख जंगल में भाग गया।

(iv) मांडलगढ़ में सूखे कुएँ में दो जरख गिर गये। सूचना मिलते ही वनकर्मी बचाव हेतु मौके पर पहुँचे। मुआयना करने पर दोनों के पेट पिचके प्रतीत हुये। इससे यह अनुमान लगाया गया कि दोनों को गिरे कई दिन हो गये थे। एक बाल्टी में पानी भर कर रस्सी से बांध कुएँ के पेंदें पर रखा गया। कुछ देर बाद बाल्टी को बाहर खींच लिया गया। संभवतः दोनों ने कुछ पानी पिया था (बाल्टी का जल स्तर कम था जो या तो बाल्टी के हिलने से बिखर गया होगा या दोनों प्राणियों ने पिया होगा)। प्राणियों के भूखे होने का अनुमान लगा कर एक जीवित छोटा बकरा कुएँ में छोड़ा गया। दोनों ने न तो बकरे को मारा, न खाया। थोड़ी देर बाद बकरे के माँस के कुछ टुकड़े डाले गये, वे भी उन्होंने नहीं खाये। अब चारपाई का एक झूला बना कर दो आदमियों को उस पर बिठा कुएँ में आधी गहराई पर उनको ले जाया गया। मोटे रस्से का फन्दा 'जनेऊ' की तरफ गर्दन व अगले एक पैर में डाल बारी-बारी से दोनों को जीवित बाहर खींचा गया एवं मुक्त कर दिया गया।

(v) झालाना वन क्षेत्र से भटका एक जरख रात में जयपुर शहर में आ गया। कुत्तों के भौंकने व पीछा करने पर वह तिलकनगर में एक घर (सी—155) में घुस गया। गृह मालिक की सूचना पर वन विभाग के बचाव दल ने मौके पर पहुँच कार्यवाही प्रारंभ की। वनकर्मियों को देखकर जरख जीने में चढ़ गया। छत की तरफ का दरवाजा बन्द होने से जरख जीने में घिर गया। तुरन्त उसे बेहोशी का इन्जेक्शन डार्ट किया गया एवं पुनः झालाना वन क्षेत्र में छोड़ दिया गया।

जयपुर शहर के आस-पास गत 10 वर्षों में शहर की परिधि के रिहायशी क्षेत्रों में कई जरख सड़क दुर्घटना में मारे गये हैं। शहर के कसाईघरों का अपशिष्ट शहर के अन्दर या परिधि

पर सुनसान क्षेत्रों में अवैध रूप से फेंक दिया जाता है। इसी अपशिष्ट को खाने के लिए जरख जैसे अपमार्जक प्राणी आते हैं तथा कई बार कुत्तों या मनुष्यों द्वारा घिर जाने पर रास्ता भटक जंगल की बजाय शहर के और अन्दर तक जा पहुँचते हैं। इसी तरह तेंदुआ भी अपशिष्ट खाने शहर की परिधि के रिहायशी क्षेत्रों में आ जाता है। अतः कसाईघरों के अपशिष्ट को शहर से पर्याप्त दूरी पर डाला जाना चाहिये ताकि वन्यप्राणी भी सुरक्षित रहें एवं जन व पशु हानि की भी संभावना न रहे।

(vi) धरियावद कस्बे में सुबह एक जरख नाले को पार कर रहा था। प्रातः शहर में दूध बेचने आने वाले दूधियों ने उसे देख लिया एवं हुल्लड़ मचा दिया। जानवर घबरा कर नाले की झाड़ियों में छिप गया। दूधियों के हुल्लड़ को सुनकर आस-पास के लोग भी आ गये। नाले के दोनों किनारे पर भीड़ जमा हो गई। घिरने से जरख को बच कर भागने का रास्ता उपलब्ध नहीं रहा (बल्कि लोगों ने उसे मनोरंजन बना लिया एवं भागने नहीं दिया)। किसी ने ''बाघ'' घिर जाने की सूचना वन विभाग को दी। सीतामाता वन्यजीव अभयारण्य का बचाव दल मौके पर पहुँचा। क्षेत्रीय वन अधिकारी ने मुआयना किया, पद चिन्हों (Foot prints) को देखा तो निष्कर्ष निकाला कि घिरा हुआ जानवर बाघ नहीं, जरख है। नाले में झाड़ियों के मध्य एक सँकड़ी पगडन्डी थी। पगडन्डी पर एक वृक्ष के पास पिंजरा रखा गया तथा स्लाइडिंग गेट की डोरी पकड़ कर एक वनकर्मी को वृक्ष के छत्रक में छुपा कर बिठा दिया गया। योजना बनाई गई कि जरख को पगडन्डी की तरफ खदेड़ा जाये तथा जैसे ही वह पिंजरे में घुसे, वृक्ष पर बैठा व्यक्ति स्लाइडिंग गेट की डोरी छोड़ कर दरवाजा बन्द कर देगा। काफी प्रयास किया गया लेकिन जरख पगडन्डी पर नहीं जा रहा था। योजना असफल होने पर नयी योजना बनाई गई। निर्णय लिया गया कि लोगों की भीड़ का घेरा धीरे-धीरे छोटा कर जरख को नाले में उस जगह ले जाया जावे जहाँ पानी भरा है तथा उसे पानी में घुसने को मजबूर किया जाये। प्रयास रंग लाया तथा थोड़ी ही देर में जरख को पानी में उतार दिया गय। अब जानवर ठीक से दिखाई दे रहा था। पानी के किनारे पिंजरा रखवाया गया तथा मनुष्यों के घेरे को पिंजरे की तरफ से हटा कर उसी दिशा में कुछ दूर खड़ा किया गया। लम्बे बांसों से तीन तरफ से खदेड़ कर जरख को पिंजरे में घुसा दिया गया एवं बस्ती से दूर वन क्षेत्र में मुक्त कर दिया।

यहाँ ध्यान देने की बात यह है कि सुबह-सुबह दूध बेचने वाले जरख को नहीं घेरते तो स्वाभाविक है कि वह स्वयं ही बस्ती से दूर चला जाता। संभवतः बाघ के भ्रम में जरख की घेराबन्दी हो जाने से यह स्थिति बनी। वैसे जहाँ तक संभव हो, अनावश्यक घेराबन्दी न की जावे तो उचित रहता है। वन्यप्राणी स्वयं ही मनुष्यों से डर कर भागते हैं। थोड़ा सा मौका दिया जाने पर वन्यप्राणी स्वयं ही चले जाते हैं।

(vii) बान्दीकुई शहर के पास एक जरख सूखे कुएँ में गिर गया। जरख ने एक तरफ कुएँ में माँद खोद ली थी। बचाव स्टाफ मौके पर पहुँचा तो शोर-शराबा सुन वह अपनी माँद में छुप कर बैठ गया तथा कुएं में ऊपर से देखने पर बिल्कुल भी नजर नहीं आता था। उसे माँद

से निकालने हेतु सब प्रयास व्यर्थ गये। कुएं में टार्च से रोशनी डाल कर माँद की दिशा व खुदी मिट्टी को देख कर गहराई का अनुमान लगाया गया। मांद की स्थिति को ध्यान में रख ऊपर से माँद के ठीक ऊपर अतिरिक्त कुंएनुमा गड्डे की खुदाई प्रारंभ की गई। धीरे-धीरे खोदते हुये काफी गहराई तक पहुँच कर माँद के अंतिम छोर को लगभग छू लिया गया। माँद के मुंह पर पिंजरा रख खुदे भाग पर बांस का प्रहार कर आवाज पैदा की गई, लेकिन प्राणी उसमें नहीं घुसा। पिंजरा हटा कर ऊपर से खुदे क्षेत्र में बांसों से ठूँसे मारने पर जानवर माँद से बाहर आया। उसके गले में फन्दा डालने की कोशिश की गई तो उसने दो बार फन्दे के मजबूत रस्से को चबा कर काट डाला। तीसरी बार फन्दा उसके पिछले पैर में फंस गया। फन्दे के रस्से को पिंजरे में पिरो कर तुरन्त पिंजरा कुएँ में उतार कर फर्श पर टिका दिया तथा शीघ्रता से रस्सा खींच जरख को पिंजरे में घसीट लिया गया।

(vii) सिन्डोली (दौसा) में एक जरख एक कम गहरे कुएँ में गिर गया। रस्से का फंदा उसके गले व अगले पैर में डालने के काफी प्रयास किये लेकिन सफलता नहीं मिली। अन्त में फंदा गले में डालकर (बिना झटका दिये) शीघ्रता से उसे बाहर खींच, पिंजरे में रस्सा पिरो कर शीघ्रता से पिंजर में घसीट लिया गया।

अकेले गले में फन्दे डालकर खींचना खतरनाक साबित हो सकता था तथा दम घुटने से प्राणी की मौत हो सकती थी। चूँकि यहाँ कुएँ की गहराई कम थी तथा खिंचाई में लगने वाला समय अल्प था एवं रस्से की मोटाई काफी थी अतः अनुभवी स्टाफ ने निरापद स्थिति पाकर ही केवल गर्दन में फन्दा डाल कर खींचने का निर्णय लिया। हाँ, इस स्थिति में अनावश्यक झटके नहीं लगने का पूरा ध्यान रखा गया ताकि श्वसन नली पर दबाव पड़ने की स्थिति न हो तथा ट्रेकिया सुरक्षित रहे।

अजगर (Indian Python — Python molurus) बचाव प्रकरण :

(i) उदयपुर जिले में झाड़ोल तहसील में गुजरी की नाल नामक वन क्षेत्र में कई अजगर निवास करते हैं। अजगरों द्वारा ग्रामीणों की कई बकरियाँ निगल ली गई थीं। ग्रामीणों ने एक अजगर को ऐसी अवस्था में ढूँढ़ लिया, जब वह एक बकरी को आधा निगल चुका था। आस-पास के सैकड़ों लोगों ने घेरा डाल कर लम्बे-लम्बे बाँसों से अजगर से छेड़-छाड़ की तो उसने बकरी को उगल कर पेट से बाहर निकाल दिया, लेकिन बकरी मर चुकी थी। लोगों ने रस्से का एक सरकने वाला फन्दा बनाकर लम्बे बांस की मदद से अजगर के गले में डाल दिया। एक रस्से के फन्दे से पूँछ को बांध दिया। आगे पीछे रस्सा बांध दोनों रस्सों को एक टाट के बोरे में पिरो, खींच कर अजगर को बोरे में डाल कर झाड़ोल रेन्ज कार्यालय में प्रस्तुत किया। प्राणी स्वस्थ था अतः वनकर्मियों ने उसे शीघ्र ही सुरक्षित बहते पानी के नाले वाले वनक्षेत्र में मुक्त कर दिया। अजगर को पकड़ कर रस्से के फन्दे के स्थान पर उसके मुँह पर मोजा पहनाने से उसके द्वारा काटे जाने से बचा जा सकता है।

(ii) कुंभलगढ़ के पास, पानी भरे कुएँ में एक अजगर गिर गया। वन विभाग के बचाव दल ने कमर पर रस्सा बांध कर एक आदमी को कुएं में उतारा। जब वह पानी के कुछ ऊपर रह गया, उसने रस्से का एक फन्दा बाँस की लम्बी लकड़ी की मदद से अजगर के गले में उतार, फंदे में कस लिया। इसी तरह एक और फन्दा शरीर की दूसरी जगह कस कर उसे बाहर निकाल कर मुक्त कर दिया।

दुबोईया (Ressell's Viper-Vipera russelli) बचाव प्रकरण :

लोयरा गाँव (उदयपुर) में एक दुबोईया एक घर के पास पड़े पत्थरों के ढेर में देखे जाने पर वन विभाग को बचाव हेतु सूचना मिली। तुरन्त उदयपुर चिड़ियाघर का स्टाफ बचाव हेतु मौके पर पहुँचा। साँप पत्थरों के ढेर में काफी अन्दर छुपा हुआ था तथा आंशिक रूप से दिखाई दे रहा था। दुबोईया व अजगर में मोटेरूप में काफी समानता होती है। गलती से दुबोईया को अजगर मान कर एक वनकर्मी ने पत्थरों के ढेर में हाथ अन्दर डाल कर जैसे ही सांप को पकड़ा वह दंश का शिकार हो गया। साँप को बाहर खींच कर टाट के बोरे में बन्द कर दिया गया। वनकर्मी को बेहोशी आने लगी। तुरन्त उसे अस्पताल पहुँचाया गया। उसकी अंगुली काटनी पड़ी एवं बड़ी मुश्किल से उसकी प्राणरक्षा हो सकी। साँप को सज्जनगढ़ अभयारण्य में सुरक्षित छोड़ दिया गया। दुबोईया की पूँछ पकड़ कर लटकती अवस्था में उठा कर बोरे में आसानी से डाल कर बन्द किया जा सकता है। इस साँप की आवाज बहुत डरावनी होती है जिसे सुन कर पहचान का अच्छा सूत्र हाथ लग जाता है।

समान दिखने वाले विषैले व विषहीन साँपों के मामले में शत-प्रति-शत सही पहचान जरूरी है। दुबोईया एवं अजगर; दुबोईया एवं रसैल सैण्ड बोआ (*Eryx conicus*); कॉमन क्रेट (*Bungarus caeruleus*) एवं कॉमन वुल्फ स्नेक (Lycodon aulicus); ग्रीन पिट वाइपर (Trizmeresurus gramineus) एवं ग्रीन व्हिप स्नेक (*Ahaetulla nasutus*); ग्रीन पिट वाइपर एवं ग्रीन कीलबैक (*Macropisthodon plumbicolor*), सॉ-स्केल्ड वाइपर (*Echic carinatus*) एवं कैट स्नेक (*Boiga trigonata*) आदि में इतनी समानता है कि बहुत सावधानी से ही देखने पर उनमें विभेद किया जा सकता है। जब दो भिन्न-भिन्न जाति के समान दिखने वाले साँप सामने हों तो पहचान हेतु अकेले रंग-रूप पर निर्भर नहीं करना चाहिये, बल्कि अनेक पैरामीटरों की तुलना एकसाथ करनी चाहिये — जैसे कि चलने का ढंग, आवाज करने का ढंग, कुंडली लगाने का ढंग, सिर के चकत्तों (*Head Scalation*) का विन्यास, मुख्य शरीर व पूँछ की लम्बाई का अनुपात, शारीरिक बनावट, आक्रमण के समय गर्दन की गति का तरीका, जीभ के अग्रभाग का रंग आदि-आदि।

साँप पकड़ते समय पैरों में गमबूट पहनना चाहिये। साँप पकड़ने के हुक व कैलीपर्स का भी उपयोग करना चाहिये।

टिप्पणी :

कई बार चिड़ियाघरों में भी वन्यप्राणी पिंजरों से बाहर निकल आते हैं। ऐसे समय भी बचाव

कार्य पूरी तैयारी के साथ करने पड़ते हैं ताकि जानवर व दर्शक दोनों की सुरक्षा हो सके। एक बार एक अजगर रामनिवास बाग में स्थित चिड़ियाघर जयपुर में अपने पिंजरे से निकल कर बाग की सघन हरियाली में गायब हो गया। उसे काफी ढूँढ़ा गया लेकिन वह कहीं नहीं मिला। बाग की नियमित जांच-पड़ताल हेतु वनकर्मियों को तैनात किया गया। कुछ दिन बाद बाग के एक कोने में से पक्षियों को बेचैनी से चहचहाते एवं मंडराते देखा गया। पक्षियों की ऐसी हरकत आमतौर पर साँप या बिल्ली के समीप होने पर देखी जाती है। वनकर्मियों ने अन्दाजा लगाया, हो न हो, वहाँ गायब अजगर ही उपस्थित हो। मौके पर पहुँचने पर सचमुच ही वहाँ अजगर को उपस्थित पाया। उसने एक पक्षी को दबोच रखा था। वनकर्मियों ने उसे पकड़ कर पुनः उसके पिंजरे में पहुँचा दिया।

इसी तरह जयपुर चिड़ियाघर में एक नर चिपांजी पिंजरे में बाहर आ गया। स्टाफ ने उसे पकड़ने क अभियान प्रारंभ किया तो वह बिजली के खम्बे पर चढ़ गया और करंट से उसकी मौत हो गई। इस घटना के कुछ वर्ष बाद एक कपुचियन बन्दर पिंजरे से बाहर आ गया। सुबह पिंजरा खाली मिलने पर स्टाफ ने ढूँढ़ने की मुहिम प्रारंभ की। अनुभवी क्षेत्रीय वन अधिकारी ने सुझाव दिया कि चूँकि यह बन्दर काफी साल से पिंजरे में रहने का आदी है अतः एकाएक इस वातावरण को छोड़ कहीं दूर चले जाना उसके लिये कठिन है अतः आस-पास किसी पिंजरे के पास उसे घूमते मिलना चाहिये। उनकी राय थी कि अर्द्धपालतू आदतों के विकसित हो जाने के कारण चिड़ियाघर से भटका प्राणी काफी दूर नहीं जा सकता। क्षेत्रीय वन अधिकारी ने बन्दर के केयरटेकर को बुला कर एक भवन की छत पर चढ़ कर ऊँची आवाज से उन शब्दों को बोलने का निर्देश दिया जो बन्दर को भोजन देते समय वह दुलार से बोलता था। केयरटेकर ने जैसे ही बन्दर का दुलार से 3-4 बार नाम पुकारा, न जाने कहाँ से वह निकल कर आया तथा भवन के चक्कर लगाने लगा। आस-पास छिप कर खड़े वनकर्मियों ने जैसे ही उसे पकड़ने की चेष्टा की, वह भाग कर एक वृक्ष पर चढ़ गया। क्षेत्रीय वन अधिकारी को कुछ वर्षों पूर्व चिपांजी के मरने की पूरी जांच रिपोर्ट का ज्ञान था अतः उन्होंने एक वनकर्मी को विद्युत विभाग को टेलीफोन कर विद्युत आपूर्ति काटने का निर्देश दिया ताकि बिजली के खम्बों पर चढ़ने की स्थिति में चिम्पांजी वाले हादसे की पुनरावृत्ति न हो। बन्दर जिस वृक्ष पर चढ़ा था उसके नीचे 5-6 आदमी जाल फैला कर खड़े हो गये। एक आदमी वृक्ष पर चढ़ा ताकि बन्दर को जाल पर छलांग लगाने हेतु मजबूर किया जा सके। बन्दर चालाक था। वह जाल पर कूदने की बजाय जाल से कुछ दूर कूदा। जाल को समेट कर बंदर पर फेंका जाता, उससे पूर्व ही एक अनुभवी वनकर्मी ने नंगे हाथों बन्दर को दबोच लिया। बन्दर ने वनकर्मी को बुरी तरह काट लिया, लेकिन उसने बिना घबराये तुरन्त बन्दर के दोनों हाथों को पीठ की तरफ लाकर अपने एक हाथ से कस कर पकड़ लिया तथा दूसरे हाथ से उसकी गर्दन की चमड़ी को पकड़ लिया। इस स्थिति में बन्दर काट नहीं सकता। उसे एक बोरे में डाल कर उसके पिंजरे में ले जाकर छोड़ दिया गया। वनकर्मी को तुरन्त इलाज हेतु अस्पताल ले जाया गया।

एक बार अचानक मूसलाधार वर्षा होने से जयपुर चिड़ियाघर में पानी भर गया तथा सूखी व नम खाई से घिरे बाड़ों से वन्य प्राणी तैर-तैर कर बाहर आ गये। एक मगरमच्छ दूर जाकर पानी के बहाव से बने गड्ढे में पहुँच गया। एक डीजल पम्प सेट लगा कर पानी को निकाल कर रस्से

के फन्दे को मगर की गर्दन व पूँछ पर डाल कर उसे पकड़ लिया गया। इसी बाढ़ में एक सिंह (Lion-Panthera leo) भी बाड़े से बाहर आ गया तथा घूमता हुआ चिड़ियाघर की चारदिवारी से बाहर आकर रामनिवास बाग में घूमने लगा। स्थिति का शीघ्रतापूर्वक मूल्यांकन कर अधिकारियों ने सिंह को पकड़ने की योजना बनाई। प्रथम चरण में प्राणी को खुले बाग से हाँक कर चिड़ियाघर परिसर में वापिस लाना था तथा दूसरे चरण में परिसर में हाँक कर उसके पिंजरे में पहुँचाना था। योजना के सभी चरण स्टॉफ को बता कर सिंह के केयरटेकर को चिड़ियाघर के मुख्य प्रवेश द्वार की दीवार पर खड़ा कर सिंह को भोजन देने के समय दुलार से बोलने वाले शब्द व सिंह का नाम पुकारने को कहा। झाड़ियों में छिपा सिंह तुरन्त ही चलता हुआ चिड़ियाघर परिसर में आ गया। तुरन्त चिड़ियाघर के मुख्य प्रवेशद्वार को बन्द कर दिया गया। एक अधिकारी ने सिंह का मिजाज जानने के लिए उसका नाम लिया तो सिंह ने बिगड़ कर हमला बोल दिया। अधिकारी ने तुरन्त अपनी आपको एक वृक्ष की ओट में करके बचाव किया। सिंह ने वृक्ष को टक्कर लगाई और पुनः अपने मूलस्थिति में लौट आया। जाहिर था वह अपने केयरटेकर के निर्देशों का ही अभ्यस्त था अतः अन्य को सहन नहीं कर पा रहा था। अब पूर्वनियोजित योजना के अनुसार केयरटेकर को बुकिंग रूम की खिड़की के पास चिड़ियाघर परिसर के बाहर खड़ा कर बुकिंग खिड़की में से सिंह को आवाज देने हेतु तैयार खड़ा किया गया। बुकिंग रूम के परिसर की तरफ वाला दरवाजा खुला छोड़ दिया गया। एक व्यक्ति को बुकिंग रूम की छत पर बैठाया गया। बुकिंग रूम के बाहर खड़े केयर-टेकर ने सिंह को पुकारा, तो वह दौड़ कर बुकिंग रूम में घुस गया। छत पर बैठे व्यक्ति ने तुरन्त ऊपर से बैठे-बैठे दरवाजा बन्द कर दिया। तुरन्त ही एक पिंजरा दरवाजे के सामने लगाया गया। पिंजरे के ऊपर टीन की चद्दर खड़ी की गई एवं दरवाजे को खोल कर बुकिंगरूम से सिंह को हाँक कर पिंजरे में ले लिया गया एवं उसके बाड़े में मुक्त कर दिया गया।

जयपुर चिड़ियाघर से एक बोनट बन्दर (Macaca radiata) निकल गया। सब जगह उसे तलाशा गया लेकिन वह नहीं मिला। अनुभवी क्षेत्रीय वन अधिकरी का अनुमान था कि बोनट बन्दर वृक्षीय आवास पसंद करता है अतः वह शहर में कहीं न कहीं लंगूरों (Presbitis entellus) के साथ मिल सकता है, न कि रीसस बन्दरों (Macaca mulata) के साथ। बोनट बन्दर राजस्थान में प्राकृतिक रूप में नहीं मिलता। यह दक्षिण भारतीय प्रजाति है। दक्षिण भारत के कई ट्रक चालक-परिचालक अपने ट्रकों की सुरक्षा हेतु या मनोरंजन हेतु इसे पालते हैं एवं यात्रा में अपने साथ रखते हैं। जब ये ट्रक राजस्थान से गुजरते हैं तो कई बोनट बन्दर ट्रक मालिकों से भाग छूटते हैं या वन विभाग की कार्यवाही के डर से छोड़ दिये जाते हैं। ये बन्दर जयपुर शहर व अन्यत्र कई जगह लंगूरों के दल में शामिल हो जाते हैं क्योंकि दोनों को वृक्षीय आवास पसंद है जबकि राजस्थान में मिलने वाला रीसस बन्दर अपेक्षाकृत कम वृक्षीय प्रकृति का है अतः उसके अधिक सजातीय होने के बावजूद भी यह उनके झुण्ड में नहीं मिलते। रेंज अधिकारी ने इस प्रेक्षण को अपनी जांच का आधार बना कर वनकर्मियों को जयपुर शहर में उन स्थानों पर खोज-बीन करने भेजा जहाँ लंगूर मिलते थे और अन्त में बोनट बन्दर लंगूरों के साथ ही मिला। केयर-टेकर ने पिंजरे में भोजन रख कर उसे आवाज दी तो वह आ गया और पिंजरे में दाखिल हो गया। उसे तुरन्त चिड़ियाघर ले जाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

इस पत्र में नीलगाय, चौसिंगा, साँभर, पैंगोलिन, बिज्जू, जरख (लकड़बग्घा), दुबोईया, बन्दर, सिंह, अजगर आदि के बचाव से संबंधित अनुभवों का विवरण प्रस्तुत किया गया है। सभी प्रकरणों का अध्ययन करने से आभास होता है कि जैसी परिस्थितियाँ होती हैं, उसी के अनुरूप योजना बनानी पड़ती है। बचाव कार्य में स्वस्थ, निडर, अनुभवी, दृष्टिदोष विहीन कर्मचारी अधिक उपयोगी साबित होते हैं। बचाव दल के सदस्यों को पुराने बचाव प्रकरणों एवं पुरानी जाँच रिपोर्टों को समय-समय पर अध्ययन करते रहना चाहिये। इससे उनके अनुभव में बढ़ोत्तरी होती है एवं बचाव योजना बनाते समय व्यक्ति हर पहलू से सोचने लगता है।

बचाव प्रकरणों का अध्ययन करने से ज्ञात होता है कि अधिकांश प्रकरण प्राणियों के कुंओं में गिरने से होते हैं। प्रायः लागत कम करने के उद्देश्य से लोग कुओं की मुंडेर (जगत) नहीं बनाते एवं भूमि तल तक ही कुंए की चिनाई करते हैं। कई बार पानी के संग्रह हेतु बनाये टैंकों में भी पैरापट की दीवार का अभाव होता है एवं इनमें भी गिरने से वन्य प्राणियों की प्राण हानि होती है (शर्मा[4])। यदि वन क्षेत्रों के पास एवं कृषि क्षेत्रों में कुओं एवं हौंदों पर उचित ऊँचाई की पैरापेट दीवार बनाई जावे तो न तो वन्यप्राणी दुर्घटनावश गिरेंगे, न ही बचाव अभियान करने पड़ेंगे। आबादी क्षेत्र में यदि नागरिक सहयोग करें तो अनेक प्राणियों को सफलतापूर्वक बचाया जा सकता है। माउन्ट आबू में अच्छा जनसहयोग मिलने के कारण मार्च 2000 से फरवरी 2001 तक कुल 52 साँपों को सफलतापूर्वक पकड़ कर दूर वन क्षेत्र में मुक्त किया गया।[7] वैसे आबादी क्षेत्रों में कॉमन पाम सिवेट (Paradoxurus hermaphroditus), स्माल इण्डियन सिवेट (Viviericula indica), नेवले, बिल्लियाँ, साँप, गिलहरी, चूहे, मूषक, गोह, छिपकली, गिरगिट आदि का मिलना आम है। यदि छेड़-छाड़ न की जावे तो ये प्राणी मनुष्यों को कोई हानि नहीं पहुँचाते हैं तथा स्वतः ही अन्यत्र चले जाते हैं। फिर भी जरूरत पड़ने पर वन विभाग की मदद ली जा सकती है ताकि पकड़े या घायल प्राणियों का पुनर्वास हो सके।[1] कई बार बहुत कम दिखाई देने वाले प्राणी, जैसे पैंगोलिन (Manis crasicaudata) भी आबादी क्षेत्र के पास नजर आते हैं। ''जुरैसिक पार्क'' जैसी फिल्मों के देखने के बाद आम लोगों के मस्तिष्क में डायनोसोरों की तस्वीरों का खाका बना हुआ है। कई लोग पैंगोलिनों को डायनोसोर मान कर खतरनाक करार देकर मार डालते हैं जबकि इन प्राणियों के मुँह में दाँत तक नहीं होते। पैंगोलिन एक स्तनधारी प्राणी है तथा मनुष्यों को कोई नुकसान नहीं पहुँचाता। इस प्राणी के मिलने पर हमें वापिस वन क्षेत्र में छोड़ देना चाहिये।

सूखा पड़ने पर, खास तौर से गर्मी में, जलस्रोतों के सूखने पर मछलियों, कछुओं, मगरों पर संकट आ जाता है। मगर पलायन करने लगते हैं एवं कई बार आबादी क्षेत्रों में पहुँच जाते हैं। मगरों व कछुओं को पकड़ कर बारहमासी जल स्रोतों तक पहुँचा देना चाहिये।[5] सड़क दुर्घटना में भी तरह-तरह के प्राणी मरते हैं एवं घायल होते रहते हैं।[2, 3] यदि कोई वन्यप्राणी सड़क पर घायल पड़ा है तो उसको बचाने के भरपूर प्रयास किये जाने चाहिये एवं वन विभाग को शीघ्र पूरी सूचना दी जानी चाहिये। वैसे यदि वाहनों के चालक जागरूकता दिखायें तो अनेक वन्यप्राणियों को सड़कों पर दुर्घटना से बचाया जा सकता है।

वन्य प्राणी बचाव अभियान की यूनिट को आग बुझाने वाले दल की तरह मुस्तैद रहना चाहिये। सूचना मिलने पर तैयारी करने के बजाय पहले से ही तैयार रहना चाहिये। वाहन, सीढ़ी, जाल, टाट के बोरे, रस्सी, टार्च, सर्च लाइट, सुरक्षा पेटी, एप्रन, दस्ताने, गमबूट, हंटर शू, बेहोशी व होश में लाने की दवायें व डार्ट उपकरण, अन्य समस्त चिकित्सा उपकरण एवं दवायें, फर्स्ट एड किट, चाकू, संचार साधन, पर्याप्त प्रशिक्षित आदमी, भिन्न-भिन्न आकार के पिंजरे आदि हमेशा तैयारी की स्थिति में रहना चाहिये। प्राणी के आकार का ध्यान रख कर ही पिंजरे का चयन करना चाहिये। सूर्य की रोशनी में बचाव कार्य करना ज्यादा अच्छा होता है। फिर भी स्थिति अनुसार मौके-बेमौके भी कार्य करने की तैयारी रहनी चाहिये। रात्रि में किये जाने वाले बचाव कार्यों में सुरक्षा का पर्याप्त ध्यान रखा जाना चाहिये तथा पर्याप्त प्रकाश-व्यवस्था होनी चाहिये।

प्रत्येक बचाव कार्य का पूर्ण विवरण रेकार्ड में रखा जाना चाहिये ताकि बचाव दल में आने वाले नये सदस्य उनका अध्ययन कर अधिक सफल बचाव अभियानों का संचालन कर सकें।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रेरणा एवं मार्गदर्शन हेतु श्री आर. जी. सोनी, प्रधान मुख्य संरक्षक, श्री अरुण सेन, मुख्य वन संरक्षक, श्री एम. एल. मीना, वन संरक्षक, श्री राहुल भटनागर, उप मुख्य वन्यजीव प्रतिपालक, श्री कुमार स्वामी गुप्ता, सहायक वन संरक्षक, श्री पी. एस. चुण्डावत, (स. वं. सं.) (एवं) श्री भोपालसिंह (स. व. व.) का आभारी है। इस प्रपत्र की सामग्री के संयोजन में सहयोग करने हेतु लेखक श्री के. के. शर्मा, श्री सदाशिव तिवारी, श्री सत्यनामसिंह, श्री लालसिंह, श्री रामसिंह, श्री चिरंजी लाल शर्मा, श्री जगन्नाथ पहाड़िया एवं श्री मंगल का भी विशेष आभारी है।

निर्देश

1. भटनागर, आर., राणा, वी. एस. तथा शर्मा, एस. के. : Zoos' Print 2000, 12, 8.
2. शर्मा, एस. के. : विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 1988, 31, (1), 43-53.
3. शर्मा, एस. के. : विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 1992, 35, (1), 48-60.
4. शर्मा, एस. के. : Indian Forester, 1993, 119, (10), 849-852.
5. शर्मा, एस. के. : Cobra 2000, 40, 9-10.
6. शर्मा, एस. के. : JBNHS, 2000 99 (I), 103.
7. शर्मा, एस. के., राठौड़, एफ. एस., चावड़ा, के. तथा पटेल, एस. : Cobra, 2001, 44, 5-10.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 1, January 2003.

विचरणशील-चूषण वाली सपाट प्लेट से होकर सरन्ध्र माध्यम में से अस्थायी MDH प्रवाह

राजीव तनेजा तथा एन. सी. जैन
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राज.)

[प्राप्त — अगस्त 8, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य विचरणशील चूषण वाली सपाट प्लेट से होकर सरंध्र माध्यम में से एक असंपीड्य श्यान तरल के अस्थायी MDH प्रवाह की विवेचना करना है। वेग क्षेत्र तथा उपरिस्तर घर्षण के लिए हल प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Unsteady MHD flow through porous medium past a flat plate with variable suction. *By* Rajeev Taneja and N. C. Jain, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur (Raj.).

The aim of present investigation is to discuss the unsteady MHD flow of an incompressible viscous fluid through prous medium past an infinite flat plate with variable suction. Solutions have been obtained for the velocity field and skin friction. The effects of permeability parameter (K), magnetic parameter (M), suction velocity amplitude (A) and time (t) on the velocity field and skin friction are shown graphically and discussed numerically.

1. प्रस्तावना

कई शोधकर्ताओं ने[3, 8] सरंध्र सपाट प्लेट से होकर प्रवाह का अध्ययन किया है। स्टुअर्ट[13] में स्थिर चूषण वाली अपरिमित चपटी प्लेट के लिए हल निकाला है। वाटसन[12] ने बाह्य प्रवाह

को समय का सामान्य फलन मान कर प्रवाह का अध्ययन किया है जबकि केली[5] ने चूषण आश्रित काल के प्रभावों की विवेचना की है।

आधुनिक प्रौद्योगिकी में महत्त्व के कारण कई लेखकों ने सरंध्र माध्यम में से होकर प्रवाह पर विचार किया है[2,4,6,7]। मेगाबेड़[7], कुमार तथा वाष्णेय[6], सूंडेलगेकर इत्यादि[10], आचार्य इत्यादि[1], सिंह तथा सिंह[9] ने भी अस्थायी MDH प्रवाह निर्मेय की विवेचना विभिन्न प्रविधियों का उपयोग करते हुए की है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य किसी असंपीड्य श्यान तरल के अस्थायी MDH प्रवाह की विवेचना एक अपरिमित प्लेट में से होकर एक सरंध्र माध्यम में करना है जिसमें बाह्य प्रवाह को हीवसाइड इकाई फलन मान लिया गया है। लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का उपयोग करने पर वेग क्षेत्र तथा उपरिस्तर घर्षण के लिए व्यंजक प्राप्त किये गये हैं जिन्हें प्रवेश्यता प्राचल (K), चुम्बकीय प्राचल (M), चूषण वेग आयाम (A) तथा समय (t) के विभिन्न मानों के लिए आरेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

2. निर्मेय का सूत्रण तथा हल

हम एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में एक अपरिमित सपाट प्लेट से होकर रंध्रमय माध्यम में से दोविमीय वैद्युतत-चालक असंपीड्य श्यान तरल के विषय में विचार करेंगे। प्लेट रंध्रमय है और चूषण वेग अनृण अचर माध्य v_0 पर समय के साथ आवर्ततः विचरण करता है। x-अक्षि को प्लेट की सीध में तथा y-अक्षि को इसके लम्बवत् लिया गया है। इस ज्यामिति के लिए गति तथा सातत्य के समीकरण निम्नवत् हैं—

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{K}u - \frac{\sigma}{\rho}B_0^2 u \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

जहाँ पर संकेतों के अपने पूर्ववत् अर्थ हैं।

मुक्त धारा वेग को

$$U = U_0[1 + H(t)]$$

द्वारा प्रदर्शित करते हैं जहाँ $H(t)$ हीवीसाइड का इकाई फलन है।

परिसीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार है

$$u = 0 \qquad y = 0 \text{ पर}$$

$$u \to U_0[1 + H(t)] \qquad y \to \infty \text{ पर} \tag{4}$$

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि v केवल समय का फलन है और m को हम निम्नवत् मानते हैं–

$$v = -v_0[1 + AH(t)] \tag{5}$$

जहाँ A वास्तविक धन अचर है।

हम निम्नांकित अविमीय संख्याओं को प्रवर्तित करते हैं–

$$y^* = \frac{v_0 y}{\nu},\ t^* = \frac{v_0^2 t}{\nu},\ u^* = \frac{u}{U_0},\ U^* = \frac{U}{U_0},\ K^* = \frac{v_0^2 K}{\nu^2} \qquad M^2 = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho v_0^2}$$

समीकरण (5) से तथा मुक्त धारा वेग के लिए अविमीय रूप में गति (1) तथा (2) के समीकरण उनके ऊपर लगे तारांकनों को हटा देने पर

$$\frac{\partial u}{\partial t} - [1 + AH(t)]\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(M^2 + \frac{1}{K}\right)(U - u) \tag{6}$$

में समानीत हो जाते हैं जिसमें संगत परिसीमा प्रतिबन्ध हैं—

$$u = 0 \qquad y = 0 \text{ पर}$$

$$u \to [1 + H(t)] \qquad y \to \infty \text{पर} \tag{7}$$

समीकरण (6) को हल करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि

$$u(y, t) = u_0(y) + u_1(y, t) \tag{8}$$

(6) में (8) को प्रतिस्थापित करने तथा t से स्वतन्त्र एवं t पर आश्रित पदों को विलग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{du_0}{dy} - \left(M^2 + \frac{1}{K}\right)u_0 = -\left(M^2 + \frac{1}{K}\right) \tag{9}$$

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} + [1 + AH(t)]\,\frac{du_1}{dy} - \left(M^2 + \frac{1}{K}\right) u_1 - \frac{du_1}{dt}$$

$$= -\left(M^2 + \frac{1}{K} + A\frac{du_0}{dy}\right) H(t) - \delta(t) \qquad (10)$$

जो परिसीय प्रतिबन्धों के साथ (8) के कारण निम्नवत् हो जाते हैं

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0 \qquad y = 0 \text{ पर}$$

$$u_0 \to 1,\ u_1 \to H(t) \qquad \text{ज्यों ज्यों } y \to \infty \qquad (11)$$

परिसीमा प्रतिबन्धों (11) के अन्तर्गत समीकरण (9) को हल करने पर

$$u_0 = 1 - e^{-my} \qquad (12)$$

समीकरण (10) में समीकरण (12) से u_0 का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + [1 + AH(t)]\,\frac{\partial u_1}{\partial y} - \alpha u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

$$= -\left[\alpha + A m e^{-my}\right] H(t) - \delta(t) \qquad (13)$$

समीकरण (13) को हल करने के लिए हम लाप्लास रूपान्तर की परिभाषा निम्नवत् है

$$\overline{u_1}(y, s) = \int_0^\infty e^{-st}\, u_1(y, t)\, dt$$

तथा इसके व्युत्क्रम की परिभाषा निम्नवत् करते हैं

$$u_1(y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \overline{u_1}(y, s)\, e^{st}\, ds$$

उपर्युक्त रूपान्तर को व्यवहृत करने पर समीकरण (13)

$$\frac{d^2 \overline{u_1}}{dy^2} + \frac{d\overline{u_1}}{dy} - (\alpha + s)\overline{u_1} = \frac{-1}{s}(\alpha + s) - \frac{A m e^{-my}}{s} \tag{14}$$

में समानीत हो जाता है और परिसीमा प्रतिबंधों (11) के साथ निम्नवत् बन जाता है—

$$\overline{u_1} = 0 \qquad y = 0 \text{ पर}$$

$$\overline{u_1} = \frac{1}{s} \qquad y \to \infty \text{ पर} \tag{15}$$

परिसीमा प्रतिबन्धों (15) के अन्तर्गत समीकरण (14) को हल करने पर हमें

$$\overline{u_1} = \frac{1}{s}\left[\left\{1 + \frac{A m e^{-my}}{[s + (\alpha + \lambda m - m^2)]}\right\} - \left\{1 + \frac{A m}{[s + (\alpha + \lambda m - m^2)]}\right\} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4(\alpha + s)}\right) y\right]\right] \tag{16}$$

प्राप्त होता है। समीकरण (16) का विलोम लाप्लास रूपान्तर लेने पर हमें

$$u_1 = 1 + \exp\left[-\left(\alpha + \lambda m - m^2\right) t - m y\right] - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda y - \left(\alpha + \lambda m - m^2\right) t\right]$$

$$\times \left[\exp\left(\overline{\frac{1}{2}\lambda - m y}\right) Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} + \overline{\frac{\lambda}{2} - m\sqrt{t}}\right) + \exp\left(-\overline{\frac{1}{2}\lambda - m y}\right)\right.$$

$$\left.\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} - \overline{\frac{\lambda}{2} - m\sqrt{t}}\right)\right] - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda y\right)\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, y\right)\right.$$

$$\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, t\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, y\right)$$

$$\left.\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, t\right)\right] \tag{17}$$

प्राप्त होता है। समीकरण (18) में u_0 तथा u_1 के मान रखने पर हमें

$$u = 2 + \exp\left[-\left(\alpha + \lambda m - m^2\right) t - 2my \right] - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda y - \left(\alpha + \lambda m - m^2\right) t \right]$$

$$\times \left[\exp\left(\overline{\frac{1}{2}\lambda - m} y\right) Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} + \overline{\frac{\lambda}{2} - m}\sqrt{t}\right) + \exp\left(-\overline{\frac{1}{2}\lambda - m} y\right)\right.$$

$$\left.\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} - \overline{\frac{\lambda}{2} - m}\sqrt{t}\right)\right] - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda y\right)\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, y\right)\right.$$

$$\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, t\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, y\right)$$

$$\left.\times Erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, t\right)\right] \qquad (18)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}, \quad \alpha = \left[M^2 + \frac{1}{\lambda}\right], \quad m = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}, \quad \lambda = (1 + A)$$

प्लेट पर अविमीय उपरिस्तर घर्षण को

$$\tau = \frac{\tau_w}{\rho U_0 v_0} = \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

$$\tau = \exp\left[-\left(\alpha + \lambda m - m^2\right) t\right]\left[\left(m - \frac{1}{2}\lambda\right)\left(1 + Erf\left(\frac{\lambda}{2} - m\right)\sqrt{t}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\left(\frac{\lambda}{2} - m\right)^2 t\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\lambda + \sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\; Erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda^2 + 4\alpha\right)}\, t\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\lambda^2 + 4\alpha\right) t\right)\right] \qquad (19)$$

द्वारा दर्शित किया जाता है।

NO	K	M	t	A
1	0.6	2.0	1.0	1.0
2	1.4	2.0	1.0	1.0
3	0.6	3.0	1.0	1.0
4	0.6	3.0	2.0	1.0
5	0.6	3.0	2.0	2.0

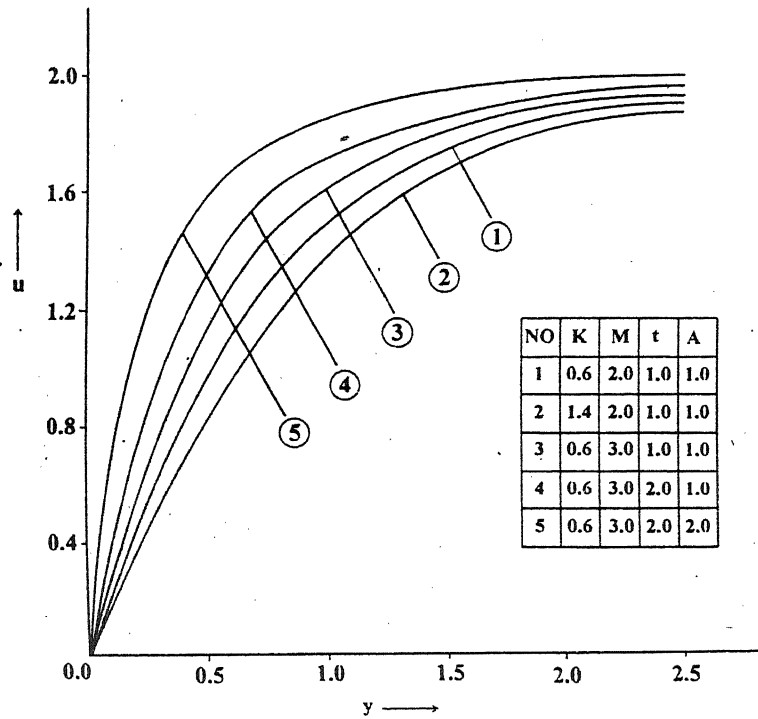



Fig. 1 Velocity distribution u plotted against y for different values of K, M, t and A.

NO	K	t	A
1	0.6	1.0	1.0
2	1.4	1.0	1.0
3	0.6	2.0	1.0
4	0.6	2.0	2.0

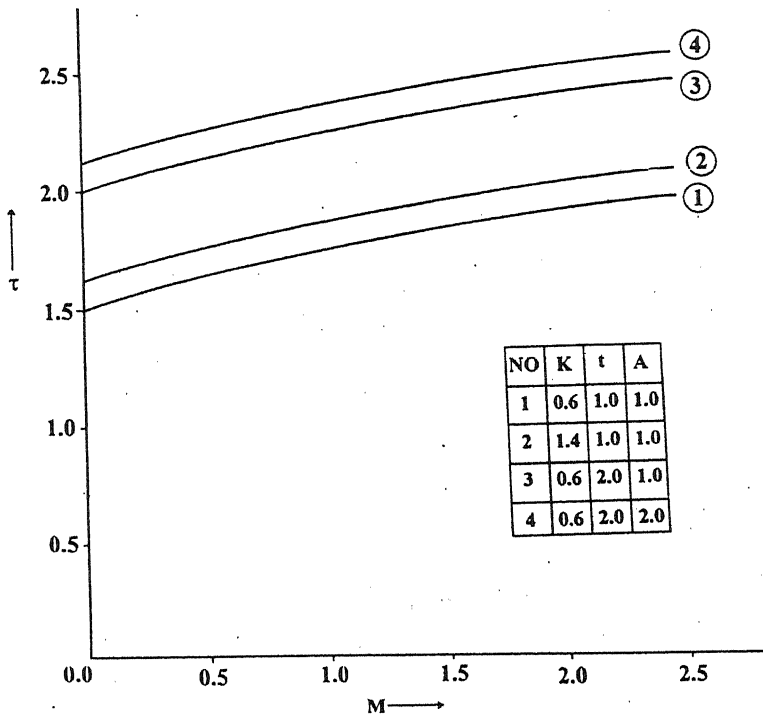



Fig. 2 Skin friction τ plotted against M for different values of K, t and A.

3. विवेचना तथा निष्कर्ष

हल को सही सही समझने के लिए हमने प्लेट पर वेग वितरण तथा उपरिस्तर घर्षण के सांख्यिक मानों को K (प्रवेश्यता प्राचल), M (चुम्बकीय प्राचल), A (चूषण वेग आयाम) तथा t के विभिन्न मानों के लिए परिगणित किया है।

चित्र 1 में वेग वितरण को y के विपक्ष आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि जब K में वृद्धि की जाती है तो वेग घटता है किन्तु M, t तथा A के प्रसंग में पूरी घटना विपरीत हो जाती है।

चित्र 2 में उपरिस्तर घर्षण को M के विरुद्ध आलेखित किया गया है। यह देखा जाता है कि K, t तथा A में वृद्धि करने से उपरिस्तर घर्षण बढ़ जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय गणित विभाग की श्रीमती डॉ० एम. गर्ग के आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र के विषय में अपनी उपयोगी राय व्यक्त की। लेखकों में से एक एन. सी. जैन, यू. जी. सी. तथा राजस्थान विश्वविद्यालय द्वारा प्रदत्त आर्थिक सहायता के लिए आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. आचार्य, एम. दाश, जी. सी. तथा सिंह, एल. पी. : Indian J. Pure Appl. Math., 2000, 31, 1.
2. अहमदी, जी. तथा मानवी, आर. : Ind. J. Tech., 1971, 9, 441.
3. बंसल, जे. एल. : Magnetofluid dynamics of Viscous Fluids. Jaipur Publishing House, India (1994).
4. ब्रिंकमैन, एच. सी. : Appl. Sci. Res., 1947, A1, 27.
5. केली, आर. ई. : Quart. J. Mech. Appl. Math., 1965, 18, 287.
6. कुमार के. तथा वार्ष्णेय, सी. एल. : Indian J. Pure Appl. Math., 1984, 15, 1041.
7. मेगाबेड, ए. ए. : Indian J. Pure Appl. Math. 1984, 15, 1140.
8. श्लिश्टिंग, एच. : Boundary Layer Theory. McGraw-Hill Company, New York (1968).
9. सिंह, एन. पी. तथा सिंह, ए. के. : Jnanabha, 1994, 4, 135.
10. सुंडेलगेकेर, वी. एम., रमणमूर्ति, टी. वी. तथा टखर, एच. एस. : Indian J. Pure Appl. Math., 1990, 21, 384.
11. स्टुअर्ट, जे. टी. : Proc. Roy. Soc., 1955, 231 A, 116.
12. वाट्सन, जे. : Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, 11, 302.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405